

5

분수의 덧셈과 뺄셈

단원 개관

이분모 분수의 덧셈과 뺄셈은 범자연수 연산과 같은 맥락으로 그 수가 분수로 확장되었음을 이해해야 한다. 그러나 범자연수 연산의 의미가 분수 연산으로 직접적으로 확장되는 것은 아니므로 다양한 분수 모델과 교구 활용을 통해 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 개념을 이해하고 원리를 탐구할 수 있도록 활동을 구성했다.

『수학 4-2』에서는 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 다루었다. 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈은 기준이 되는 단위가 같으므로 분자끼리의 덧셈과 뺄셈으로 범자연수 연산의 연장선에서 문제를 해결할 수 있었지만 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 공통분모 도입의 필요성에 따라 분수 연산에 대한 보다 깊은 이해가 필요하다. 이 단원에서는 실생활 속에서 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈이 필요한 상황을 제시하여 자연스럽게 공통분모의 필요성을 끌어낼 수 있도록 활동을 구성했다. 또한 단위 추론이 용이한 분수 모델을 제시하여 통분을 이용한 연산의 이해를 도왔으며 분수 막대를 이용하여 이분모 대분수의 덧셈과 뺄셈의 개념 이해와 원리 탐구를 할 수 있도록 활동을 안내했다. 이를 통해 학생들은 문제 해결 능력과 추론 능력뿐 아니라 정보 처리 능력을 기를 수 있다. 이와 더불어 실생활 맥락 상황의 문제를 제시하고 여러 가지 방법으로 문제를 해결한 후 그 과정을 설명하는 기회를 제공하여 학생들의 창의·융합 능력, 의사소통 능력, 태도 및 실천 능력을 기를 수 있다.

이 단원에서 학습하는 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈은 이후 5학년 2학기의 분수의 곱셈과 6학년의 분수의 나눗셈 학습과 연계되므로 학생들이 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 개념 및 원리에 대한 정확한 이해를 바탕으로 분수 연산의 기본 개념이 잘 형성될 수 있도록 지도해야 한다.

준비할 교구: 분수 막대

주의 사항

- 여러 가지 계산 방법을 살펴보고 각 계산 방법의 장단점을 생각해 보도록 지도한다. 이때, 자신이 가장 효율적이라고 생각하는 방법을 선택하고 그렇게 선택한 이유를 설명해 보도록 하며, 최소공배수를 공통분모로 사용하는 것을 강요하지 않도록 유의한다.
- 분수 막대를 이용하여 계산 원리를 탐색할 때에는 단순 조작 활동에 그치지 않을 수 있도록 자신의 문제 해결 과정을 설명하는 활동을 계획한다.

단원 학습 계열



교육과정

2015 개정 수학과 교육과정

성취기준 [6수01-08] 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.

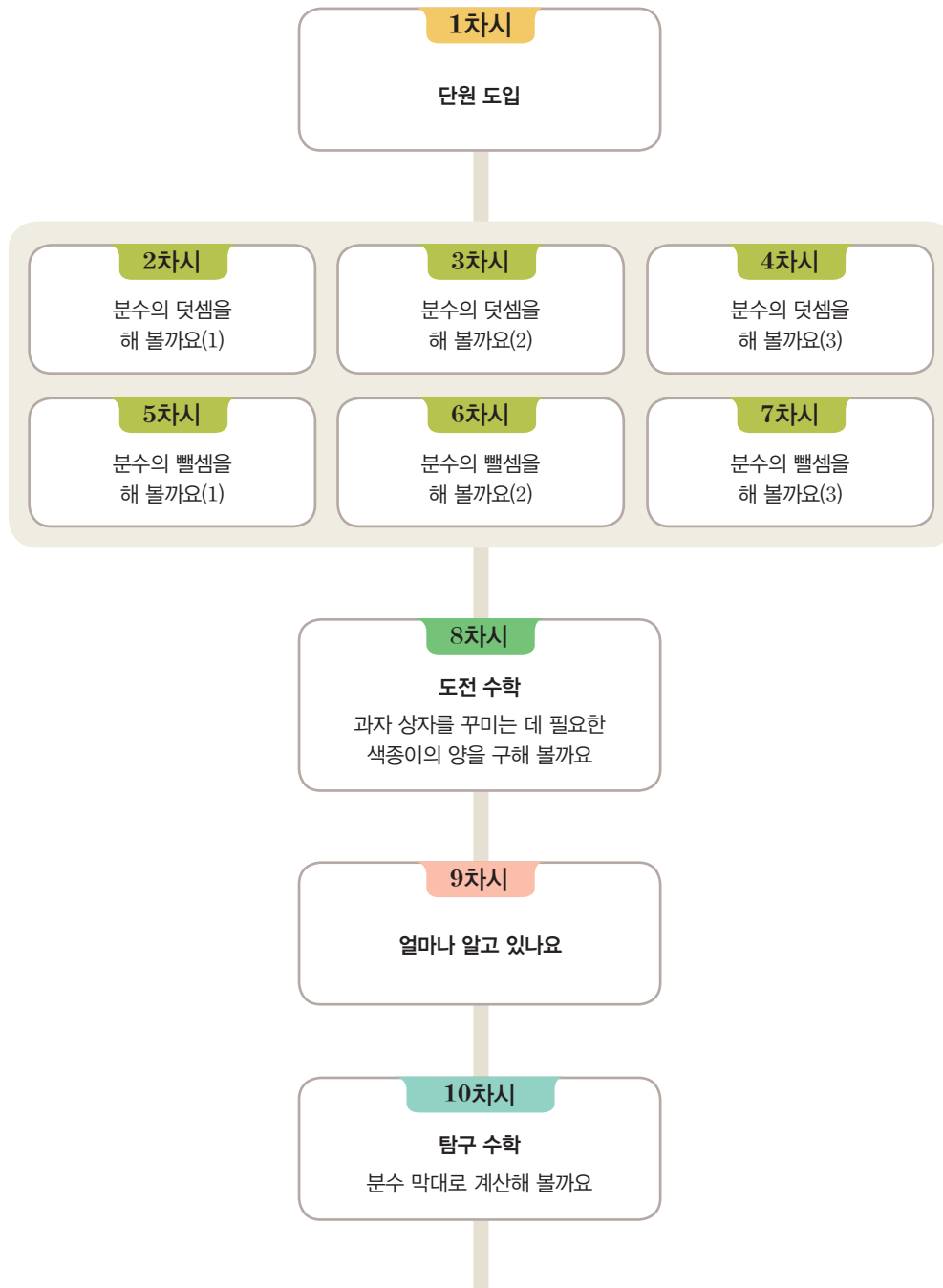
<평가 방법 및 유의 사항>

- 분수의 사칙계산에서 기약분수로 나타낼 것을 요구하지 않을 경우, 계산 결과를 기약분수가 아닌 분수로 나타내는 것도 허용한다.
- 분수의 통분을 이용한 문제에서 공통분모로 최소공배수뿐만 아니라 분모의 곱과 같은 공배수도 이용할 수 있게 한다.

단원 학습 목표

영역	단원 학습 목표
내용	<ol style="list-style-type: none"> 1. 받아올림이 없는 분모가 다른 진분수의 덧셈 방법을 알고 계산할 수 있다. 2. 받아올림이 있는 분모가 다른 진분수의 덧셈 방법을 알고 계산할 수 있다. 3. 받아올림이 있는 분모가 다른 대분수의 덧셈 방법을 알고 계산할 수 있다. 4. 받아내림이 없는 분모가 다른 진분수의 뺄셈 방법을 알고 계산할 수 있다. 5. 받아내림이 없는 분모가 다른 대분수의 뺄셈 방법을 알고 계산할 수 있다. 6. 받아내림이 있는 분모가 다른 대분수의 뺄셈 방법을 알고 계산할 수 있다.
교과 역량	<ol style="list-style-type: none"> 1. 분수의 덧셈과 뺄셈과 관련된 문제 상황을 수학적으로 나타내고 분석하여 문제를 해결할 수 있다. 문제 해결 추론 2. 분수의 덧셈과 뺄셈과 관련된 생활 주변의 여러 상황 속에서 실생활의 지식, 기능, 경험을 수학과 연결하고 융합하여 문제를 해결할 수 있다. 창의·융합 3. 여러 가지 방법으로 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 하는 방법을 논리적으로 설명할 수 있다. 의사소통 4. 교구를 이용하여 분수의 덧셈과 뺄셈의 원리를 탐구하는 과정에서 필요한 정보를 조작하고 종합할 수 있다. 문제 해결 추론 정보 처리 5. 실생활 속에서 분수의 덧셈과 뺄셈이 활용되는 예를 통해 수학의 실용성과 가치에 대해 느끼고, 수학에 대한 관심과 흥미를 높일 수 있다. 태도 및 실천

단원의 흐름



이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 통분의 필요성을 인식하고, 받아올림과 받아내림이 없는 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리에 대한 이해를 바탕으로 받아올림과 받아내림이 있는 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 알아본다. 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 이해를 바탕으로 문제 해결 및 탐구 학습 과정을 통해 수학 교과 능력을 기를 수 있다.

단원의 전개 계획

차시 「수학」 쪽수	주제	수업 내용 및 활동	교과 역량	준비물	「수학 익힘」 쪽수
1차시 84~85쪽	단원 도입	<ul style="list-style-type: none"> 단원 도입 그림에서 실생활에서 필요한 분수의 덧셈과 뺄셈 상황에 대해 흥미와 관심을 일으킨다. 들려줄 이야기를 통하여 분수의 덧셈과 뺄셈의 필요성을 이해하게 한다. 			55쪽
2차시 86~87쪽	분수의 덧셈을 해 볼까요(1)	<ul style="list-style-type: none"> 이분모 진분수의 덧셈에서 통분의 필요성을 이해하게 한다. 받아올림이 없는 이분모 진분수의 덧셈 원리를 이해하고 계산하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 문제 해결 추론 창의·융합 의사소통 태도 및 실천 		56~57쪽
3차시 88~89쪽	분수의 덧셈을 해 볼까요(2)	<ul style="list-style-type: none"> 받아올림이 있는 이분모 진분수의 덧셈 원리를 이해하고 계산하게 한다. 받아올림이 있는 이분모 진분수의 덧셈을 계산하는 여러 가지 방법을 탐구하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 문제 해결 추론 창의·융합 		58~59쪽
4차시 90~93쪽	분수의 덧셈을 해 볼까요(3)	<ul style="list-style-type: none"> 받아올림이 있는 이분모 대분수의 덧셈 원리를 이해하고 계산하게 한다. 받아올림이 있는 이분모 대분수의 덧셈을 계산하는 여러 가지 방법을 탐구하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 문제 해결 추론 의사소통 태도 및 실천 		60~61쪽
5차시 94~95쪽	분수의 뺄셈을 해 볼까요(1)	<ul style="list-style-type: none"> 이분모 진분수의 뺄셈에서 통분의 필요성을 이해하게 한다. 받아내림이 없는 이분모 진분수의 뺄셈 원리를 이해하고 계산하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 문제 해결 추론 창의·융합 의사소통 		62~63쪽
6차시 96~97쪽	분수의 뺄셈을 해 볼까요(2)	<ul style="list-style-type: none"> 받아내림이 없는 이분모 대분수의 뺄셈 원리를 이해하고 계산하게 한다. 받아내림이 없는 이분모 대분수의 뺄셈을 계산하는 여러 가지 방법을 탐구하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 문제 해결 추론 창의·융합 의사소통 		64~65쪽
7차시 98~101쪽	분수의 뺄셈을 해 볼까요(3)	<ul style="list-style-type: none"> 받아내림이 있는 이분모 대분수의 뺄셈 원리를 이해하고 계산하게 한다. 받아내림이 있는 이분모 대분수의 뺄셈을 계산하는 여러 가지 방법을 탐구하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 문제 해결 추론 창의·융합 의사소통 		66~67쪽
8차시 102~103쪽	[도전 수학] 과자 상자를 꾸미는 데 필요한 색종이의 양을 구해 볼까요	<ul style="list-style-type: none"> 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 이용하여 실생활 문제를 해결하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 문제 해결 추론 의사소통 		
9차시 104~105쪽	[얼마나 알고 있나요]	<ul style="list-style-type: none"> 다양한 문제를 해결하며 이 단원에서 배운 내용을 정리하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 문제 해결 추론 의사소통 		
10차시 106~107쪽	[탐구 수학] 분수 막대로 계산해 볼까요	<ul style="list-style-type: none"> 분수 막대를 사용하여 받아올림이 있는 대분수의 덧셈을 하게 한다. 분수 막대를 사용하여 받아내림이 있는 대분수의 뺄셈을 하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 문제 해결 추론 정보 처리 		

단원 지도 유의 사항

- ① 실생활 주변의 상황에서 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈이 활용되는 예를 제시하고 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 공통분모의 필요성을 인식할 수 있도록 지도한다.
- ② 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 형식화를 통한 정확한 계산에 앞서 어림을 통한 결괏값을 예측해 보는 활동을 통해 분수 연산의 의미를 이해할 수 있도록 한다.
- ③ 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있는 다양한 방법을 학생들이 직접 생각해 보게 하고 자신이 효율적이라고 생각하는 방법을 친구들과 이야기를 나누어 보는 활동을 통해 서로 공유하도록 한다. 이러한 과정을 통해 자신의 생각을 점검하고, 다른 사람의 방법을 자신의 방법과 비교할 수 있는 기회를 가지게 한다.
- ④ 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 문제를 해결할 때 공통분모를 두 분모의 최소공배수로 하지 않더라도 자신만의 방법을 수학적으로 타당하게 설명할 수 있으면 인정해 주도록 한다.
- ⑤ 실생활에 실제로 사용된 분수를 통해 문제를 해결하도록 하여 학생들로 하여금 흥미와 관심을 가지고 재미있게 수업에 참여할 수 있도록 유도한다.

단원 학습 평가

영역	평가 내용	관련 차시	평가 방법
내용	1. 받아올림이 없는 분모가 다른 진분수의 덧셈 방법을 알고 계산할 수 있는가?	2	지필, 관찰, 구술
	2. 받아올림이 있는 분모가 다른 진분수의 덧셈 방법을 알고 계산할 수 있는가?	3	지필, 관찰, 구술
	3. 받아올림이 있는 분모가 다른 대분수의 덧셈 방법을 알고 계산할 수 있는가?	4	지필, 관찰, 동료 평가
	4. 받아내림이 없는 분모가 다른 진분수의 뺄셈 방법을 알고 계산할 수 있는가?	5	지필, 관찰, 구술
	5. 받아내림이 없는 분모가 다른 대분수의 뺄셈 방법을 알고 계산할 수 있는가?	6	지필, 관찰, 구술
	6. 받아내림이 있는 분모가 다른 대분수의 뺄셈 방법을 알고 계산할 수 있는가?	7	지필, 관찰, 동료 평가
교과 역량	1. 분수의 덧셈과 뺄셈과 관련된 문제 상황을 수학적으로 나타내고 분석하여 문제를 해결할 수 있는가? ■ 문제 해결 ■ 추론	2~10	지필, 관찰, 구술
	2. 분수의 덧셈과 뺄셈과 관련된 생활 주변의 여러 상황 속에서 실생활의 지식, 기능, 경험을 수학과 연결하고 융합하여 문제를 해결할 수 있는가? ■ 창의·융합	2, 3, 5, 6, 7	지필, 관찰, 구술
	3. 여러 가지 방법으로 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 하는 방법을 논리적으로 설명할 수 있는가? ■ 의사소통	2, 4~9	지필, 관찰, 구술, 동료 평가
	4. 교구를 이용하여 분수의 덧셈과 뺄셈의 원리를 탐구하는 과정에서 필요한 정보를 조작하고 종합할 수 있는가? ■ 문제 해결 ■ 추론 ■ 정보 처리	10	지필, 관찰, 구술, 동료 평가
	5. 실생활 속에서 분수의 덧셈과 뺄셈이 활용되는 예를 통해 수학의 실용성과 가치에 대해 느끼고, 수학에 대한 관심과 흥미를 높일 수 있는가? ■ 태도 및 실천	2, 4	지필, 관찰, 구술

과정 중심 평가 계획 - 4차시를 중심으로

1. 목표 및 방법

평가 목표	받아올림이 있는 분모가 다른 대분수의 덧셈 원리를 탐구하여 이해하고 계산할 수 있다. [문제 해결] [추론] [의사소통] [태도 및 실천]
평가 방법	관찰, 구술, 지필, 자기 평가, 동료 평가

2. 수업 과정 및 평가 과제

수업 설계	주요 교수·학습 활동 개요	평가 계획	평가 방법
도입	전 차시 상기 및 문제 상황 이해하기 <ul style="list-style-type: none"> • 지난 시간에 배운 내용 점검하기 • 학생들이 쌀과자를 만들기 위해 쌀가루를 준비하는 상황 이해하기 	[선수 학습 확인] 전 차시 학습에 대한 점검 <ul style="list-style-type: none"> • 받아들림이 있는 분모가 다른 진분수의 덧셈 원리를 이해하고 계산할 수 있는가? 	3차시에서의 관찰 지필 구술
전개	두 사람이 가진 쌀가루의 양을 그림으로 나타내어 어렵하기 <ul style="list-style-type: none"> • 두 사람이 가진 쌀가루의 양을 그림으로 나타내어 표시하기 • 그림을 보고 두 사람이 가진 쌀가루의 양을 어렵하기 	[과정 평가 1] <ul style="list-style-type: none"> • 분모가 다른 대분수의 덧셈에서 결괏값이 어느 정도 되는지 어렵할 수 있는가? [문제 해결] [추론] 	관찰
	받아올림이 있는 분모가 다른 대분수의 덧셈 원리를 이해하고 형식화하기 <ul style="list-style-type: none"> • 분수 모델을 이용하여 $1\frac{3}{5} + 1\frac{1}{2}$의 계산 원리 이해하고 형식화하기 	[과정 평가 2] <ul style="list-style-type: none"> • 받아들림이 있는 분모가 다른 대분수 덧셈의 원리를 이해하고 형식화할 수 있는가? [문제 해결] [추론] 	관찰 동료 평가
	받아올림이 있는 분모가 다른 대분수의 덧셈의 여러 가지 방법 탐구하기 <ul style="list-style-type: none"> • $2\frac{3}{4} + 3\frac{5}{6}$를 두 가지 방법으로 계산하는 방법 탐구하고 자신이 더 효율적이라고 생각하는 방법 설명하기 • $2\frac{2}{3} + 1\frac{5}{9}$를 두 가지 방법으로 계산하기 	[과정 평가 3] <ul style="list-style-type: none"> • 받아들림이 있는 분모가 다른 대분수 덧셈 방법을 탐구하고 자신이 더 효율적이라고 생각하는 방법으로 문제를 해결하여 과정을 설명할 수 있는가? [문제 해결] [추론] [의사소통] 	관찰 동료 평가
	받아올림이 있는 분모가 다른 대분수의 덧셈을 이용하여 실생활 문제 해결하기 <ul style="list-style-type: none"> • $6\frac{1}{2} + 5\frac{3}{4}$를 이용하여 옥수수식빵과 밤식빵의 무게의 합 구하기 	[과정 평가 4] <ul style="list-style-type: none"> • 받아들림이 있는 분모가 다른 대분수 덧셈 방법을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가? [문제 해결] [태도 및 실천] 	지필
정리	정리 및 차시 예고 <ul style="list-style-type: none"> • 배운 내용 정리하기 • 차시 예고하기 	[학습 결과 확인] <ul style="list-style-type: none"> • 이 차시에서의 평가 결과를 분석하고 필요시 추가적인 사후 평가 활용 • 받아들림이 있는 분모가 다른 대분수의 덧셈 원리를 이해하고 형식화할 수 있는가? 	지필 또는 자기 평가

3. 평가로 파악한 학습 정보에 따른 지도 방안 예시

평가	학습 정보	지도 방안 예시
선수 학습 확인 (수업 전)	<ul style="list-style-type: none"> 공통분모를 이용하여 분모가 다른 진분수의 덧셈은 할 수 있으나 계산 결과에서 받아올림하는 것을 어려워함. 공통분모의 필요성은 이해하나 통분 과정에서 실수가 있음. 	<p>3차시 학습 결과 확인을 바탕으로 4차시를 계획</p> <ul style="list-style-type: none"> 받아올림이 있는 분모가 다른 진분수 덧셈의 원리와 계산 방법을 이해하지 못하는 학생이 많은 경우 4차시 전에 보충 활동을 실시함. 진분수 범위에서의 계산 과정에서 오류를 범하는 경우에는 2차시, 3차시 학습 내용을 복습하는 것이 필요함. 대분수 덧셈을 학습하기에 앞서 전체 학생을 대상으로 공통분모를 이용한 진분수 덧셈 과정을 한 번 더 설명할 필요가 있음.
과정 평가 1	<ul style="list-style-type: none"> 분수의 양을 어렵하지 못함. 예) $\frac{3}{5}$은 반 컵보다 적은 양입니다. 양감을 이용해 대략적인 계산 결과를 어렵할 수 있음. 예) $\frac{3}{5}$컵이 반 컵이 넘기 때문에 $\frac{1}{2}$컵과 더 하면 한 컵이 넘습니다. 	<ul style="list-style-type: none"> 분수의 양을 어렵하지 못할 때에는 동치분수를 활용하여 이해를 도울 수 있음. 예를 들어 반 컵은 $\frac{1}{2}$이고 $\frac{1}{2}$과 같은 분수는 $\frac{5}{10}$인데 $\frac{3}{5}$은 $\frac{6}{10}$이 되므로 반 컵보다 크다는 것을 이해할 수 있게 함. 대략적인 양감으로 어렵을 하였을 경우 학생으로 하여금 $\frac{3}{5}$컵이 왜 반 컵이 넘는다고 생각하였는지 설명할 수 있도록 기회를 줌. 설명하는 활동을 통해 제대로 어렵하지 못한 학생들에게 관찰 학습이 가능하게 될 것이며, 그 과정에서 설명이 어려운 경우 오류를 바로잡을 수 있는 기회가 되어 줄 것임.
과정 평가 2	<ul style="list-style-type: none"> 분수 모델에 그림으로 나타내는 것은 할 수 있으나 이를 형식화하는 것을 어려워함. 예) 형식화 과정에서 자연수끼리 더하는 것을 이해하지 못함. 	<ul style="list-style-type: none"> 자연수끼리 더하는 것을 어려워할 경우 $1\frac{3}{5}$과 $1\frac{1}{2}$을 각각 그림을 통해 가분수로 나타내어 계산할 수도 있음을 설명함. 수학적 []의 그림에서 1에 해당하는 분수 모델을 10칸으로 분할하여 이해를 도울 수 있도록 함.
과정 평가 3	<ul style="list-style-type: none"> 자연수끼리 더하는 방법으로 형식화하는 것을 어려워함. 예) $2\frac{3}{4}$, $3\frac{5}{6}$를 각각 $\frac{6}{4}$, $\frac{15}{6}$ 또는 $\frac{5}{4}$, $\frac{8}{6}$로 생각함. 두 가지 방법을 이해하고 계산할 수 있으나 어느 방법이 더 효율적인지 설명하는 것을 어려워함. 	<ul style="list-style-type: none"> 대분수에 대한 전형적인 오류로 []의 분수 모델 그림을 이용해 대분수 연산의 개념 형성을 재확인할 필요가 있음. 재귀 분할을 이용한 분수 모델 활용을 할 수 있도록 다양한 분모의 대분수를 제시하여 활동할 수 있도록 함. 두 가지 방법 중 어느 방법이 더 효율적이라고 생각하는지 반드시 선택해야 한다는 것이 학생에게는 심리적 부담이 될 수 있음. 선택을 강요하기보다는 두 방법의 차이점을 설명할 수 있는 정도로 활동을 마무리하는 것도 방법임.
과정 평가 4	<ul style="list-style-type: none"> 문제를 이해하고 식은 제대로 세웠으나 계산 과정에 오류가 있음. 	<ul style="list-style-type: none"> 유사한 형태의 다른 문제를 제시하여 문제 해결을 할 수 있도록 기회를 제공함.
학습 결과 확인 (후속 차시 선수 학습 확인)	<ul style="list-style-type: none"> 받아올림이 있는 분모가 다른 대분수 덧셈의 원리를 이해하지 못함. 받아올림이 있는 분모가 다른 대분수 덧셈의 원리는 이해하나 계산 과정에서 실수가 있음. 	<p>학습 결과 확인(지필 또는 학생이 스스로 배운 내용에 대하여 작성한 일지)을 바탕으로 보충 학습 계획 및 5차시 수업을 계획함.</p> <ul style="list-style-type: none"> 받아올림이 있는 분모가 다른 대분수 덧셈의 원리와 계산 방법을 이해하지 못하는 학생이 많은 경우에는 4차시의 활동에서 다른 대분수 덧셈을 제시하여 다시 논의해 보는 보충 활동을 실시함. 받아올림이 있는 분모가 다른 대분수 덧셈의 계산 과정에 실수가 있는 학생은 유사한 패턴의 문제를 제시하여 계산에 능숙해 질 수 있도록 함.

단원 배경 지식

1. 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 어림의 중요성

이분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 이해에서 가장 중요한 것은 동치분수에 대한 확고한 이해이다. 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈은 자연수 연산의 의미를 확장하여 문제를 해결하는 데 크게 어려움이 없으나 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 경우에는 기준이 되는 단위가 달라지므로 분수 연산에 대한 양감 및 수 감각의 이해가 선행되지 않으면 자연수 연산의 확장만으로는 분수 연산의 이해에 어려움을 겪게 된다. 학생이 $\frac{1}{2}$ 과 같은 기준점을 사용하여 답을 어렵할 줄 알게 되면, 분수 연산에 대해 더 잘 이해

하게 된다(Reys, Lindquist, Lambdin & Smith, 2012). 예를 들어 $2\frac{2}{3} + 4\frac{3}{4}$ 에 대한 결괏값을 실제로 계산하기 전에, 계산 결과가 6보다는 크다는 것을 알 수 있어야 하며, 더 나아가 7보다 클 것이라는 것도 어림할 수 있어야 한다. 이때 학생들에게 필요한 양감은 $\frac{2}{3}$ 가 $\frac{1}{2}$ 보다는 크다는 것과 $\frac{3}{4}$ 도 $\frac{1}{2}$ 보다는 크다는 것, $\frac{1}{2}$ 보다 큰 두 수인 $\frac{2}{3}$ 와 $\frac{3}{4}$ 을 더하면 1보다 큰 수가 될 것이라는 감각이다. 레이스(Reys) 외(2012, p. 335)는 이러한 형태의 수와 연산 감각을 발달시키면 문제에 대한 합리적 답을 더 쉽게 구하게 될 것이라고 설명한다. 국가 학업 성취도 평가(NAEP)(Carpenter et al., 1981, p. 36)에서는 다음과 같은 예제를 제시하고 13세 학생들의 응답 결과를 분석하였다.

필산을 할 시간이 없다고 하고 $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ 의 답을 어렵하라.

보기로는 1, 2, 19, 21 그리고 ‘모른다’가 주어졌다. 응답 결과 13세 아동들은 정답인 ‘2’(24%)보다는 ‘19’(28%)와 ‘21’(27%)을 더 많이 선택하였다. 그러나 이 문제를 필산으로 계산하라고 했을 때는 정답률이 높아졌다. 이것은 아동들이 타당한 답에 대한 이해가 없음을 나타낸다고 연구 결과는 설명하고 있다. 즉 분수 연산에 대한 어려움이 선행되면 분수 연산의 의미 이해에 도움이 될 수 있음을 시사한다.

2. 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서의 단위 추론과 재귀적 분할의 중요성

이지영(2015)은 초등학교 수학에서 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈은 단위와 관련하여 다양한 추론을 할 수 있는 주제이며, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 공통 단위의 필요성이 명시적으로 드러날 뿐만 아니라 공통 단위를 만드는 과정에서 다양한 수준의 단위로 이루어져 있는 양을 경험할 수 있다고 설명한다. 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 [표 1]과 같이 세 가지 수준의 단위가 나타난다 (Steffe, 2003; Steffe & Olive, 2010, 재인용: 이지영, 방정숙, 2016, p. 626).

[표 1] 단위의 구조(Steffe, 2003; Steffe & Olive, 2010, 재인용: 이지영, 방정숙, 2016, p. 626)

단위의 구조	통분을 할 때 $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ 을 나타내는 과정	
단위		1
단위의 단위		$\frac{1}{3}$ 이 3개인 1
단위의 단위의 단위		$\frac{1}{12}$ 이 4개인 $\frac{1}{3}$ 이 3개인 1

먼저 첫 번째 수준의 단위인 1이다. 분수량을 표현하기 위해서는 먼저 그 양이 가리키는 대상의 단위(referent unit) 또는 전체 단위가 필요하다. $\frac{2}{3}$ 는 전체 단위(1)를 등분할하여 표현할 수 있는데 이때 단위의 구조는 단위의 단위($\frac{1}{3}$ 이 3개인 1)로 복잡해진다. 처음에 있던 전체 단위(1)가 이제는 두 번째 수준의 단위($\frac{1}{3}$)로 표현할 수 있는 양($\frac{1}{3}$ 이 3개)이 된다. 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 필요한 공통 단위는 단위의 단위 구조를 단위의 단위의 단위($\frac{1}{12}$ 이 4개인 $\frac{1}{3}$ 이 3개인 1)로 더욱 복잡하게 구성하면 만들 수 있다. 두 번째 수준의 단위($\frac{1}{3}$)가 세 번째 수준의 단위로도 표현될 수 있는 양($\frac{1}{12}$ 이 4개)이 되므로 처음에 있던 전체 단위(1)는 세 가지 수준의 단위를 모두 포함하고 있는 양이 된다(이지영, 방정숙, 2016).

이지영, 방정숙(2016)은 이러한 세 가지 수준의 단위 구조와 관련하여 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 핵심 아이디어를 다음의 3가지로 정리하였다.

첫째, 덧셈 및 뺄셈은 곱셈 및 나눗셈과 다르게 연산에 관여하는 세 가지 양(예를 들어, 덧셈에서는 피가수, 가수, 합)이 가리키는 대상의 단위가 모두 같다. 즉 [표 1]에서 제시한 첫 번째 수준의 단위가 모두 같다. 따라서 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 먼저 연산의 의미와 관련하여 분모가 다른 분수를 더하고 빼는 의미가 무엇인지를 생각해 보게 하고 이때 각 분수의 전체 단위가 변하지 않고 그대로 유지되는 것이 매우 중요하다는 것을 인식할 수 있도록 고정된 전체 단위를 보다 명시적으로 지도할 필요가 있다.

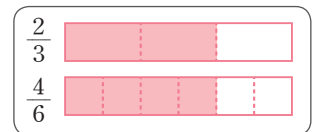
둘째, 이분모 분수의 덧셈 및 뺄셈에서 결과를 하나의 양으로 표현하기 위해서는 새로운 단위가 필요하다. 자연수의 덧셈과 뺄셈인 경우에는 세기 단위로 통일되어 있으므로 단위를 통일해야 한다는 상황이 크게 중요하지 않다. 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈 역시 분모끼리 더하지 않는다는 것을 아는 것이 중요하지만 역시 같은 단위로 제시되어 있으므로 단위 자체를 변경할 필요가 거의 없다. 그러나 $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 과 같은 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 경우에는 각 분수 양에서 두 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{3}$ 은 $\frac{1}{4}$ 과 크기가 각각 다르기 때문에 어느 하나의 단위분수를 사용하여 곱꼴값을 표현할 수 없다. $\frac{2}{3}$ 은 $\frac{1}{3}$ 을 2번 반복하여 측정할 수 있고, $\frac{3}{4}$ 은 $\frac{1}{4}$ 을 3번 반복하여 측정할 수 있지만 $\frac{2}{3}$ 와 $\frac{3}{4}$ 의 합은 위에 제시된 단위 구조만 가지고는 측정할 수 없다. 그러므로 $\frac{2}{3}$ 와 $\frac{3}{4}$ 을 공통적으로 분할할 수 있는 새로운 단위이면서 세 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{12}$ 이 필요하다. 이는 우리가 흔히 말하는 통분의 필요성을 이해하는 것과 연결된다. 따라서 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 두 번째 수준의 단위의 크기가 다르기 때문에 통분이 필요하고 통분은 세 번째 수준의 단위를 찾는 과정이라는 것을 활동을 통해 안내할 필요가 있다.

셋째, 재귀적 분할 과정을 거쳐 세 번째 수준의 단위를 찾을 수 있고 이는 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 알고리즘과 연결된다. 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 통분은 동치분수를 만드는 과정과 연결하여 설명할 수 있는데 곱셈의 항등원을 곱하는 방법, 분수의 성질을 이용하는 방법, 재귀적 분할을 하는 방법으로 크게 구분할 수 있다. 이중 곱셈의 항등원을 곱하여 동치분수를 만드는 방법은 분수의 곱셈 및 나눗셈이 선행되어야 가능하므로 현행 교육과정에서 분수 연산을 지도하는 순서와는 맞지 않으므로, 분수의 성질을 이용하는 방법과 재귀 분할을 하는 방법을 비교하여 설명하면 다음과 같다.

분수의 성질을 이용하여 동치분수를 만드는 방법으로 대부분 교과서에서 많이 활용하고 있다. $\frac{2}{3}$ 의

분모와 분자에 같은 수인 2를 곱하여 나온 분수 $\frac{4}{6}$ 는 처음 $\frac{2}{3}$ 와 그 크기가 같다.

이를 수식으로 나타내면 $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$ 이다. $\frac{2}{3}$ 와 $\frac{4}{6}$ 의 크기가 같다는 것은 [그림 1]과 같이 띠 모델을 이용하여 시각적으로 확인할 수 있다.

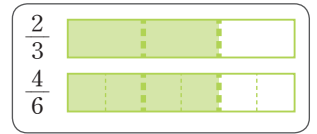


[그림 1] 분수의 성질을 이용한 동치분수 만들기

이 방법의 장점은 분수의 성질을 알면 쉽게 동치분수를 구할 수 있다는 것이고 $\frac{2}{3}$ 와 $\frac{4}{6}$ 의 크기가 같음을 모델을 이용하여 직관적으로 이해할 수 있다는 것이다. 그러나 분수의 성질을 먼저 제시하고 모델을 이용하여 두 분수의 크기가 같다는 것을 확인하는 방법은 분수의 성질에 대한 도구적 이해는 가능하지만 분수의 성질이 왜 성립하는지를 이해하는 데 한계가 있을 수 있다. 또한, 학생들이 직접 그림을 그려서 두 양을 표현한다면 단위 1을 같게 그리기 어렵기 때문에 두 양을 같은 양으로 그리기 어렵고 이로 인해 두 양이 같다는 것을 이해하기 어려울 수도 있다. 이보다 더 큰 문제는 분수의 성질을 먼저 제시하여 분수의 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하는 활동에만 치우치다 보면

동치분수를 만들기 위해 곱하는 활동이 분할 과정이 아니라 양이 늘어나는 자연수의 배 개념으로 생각할 우려가 있다는 것이다. $\frac{2}{3}$ 는 전체 단위를 3등분하여 나온 단위분수가 2개 있는 양이고 분모와 분자에 각각 2를 곱하는 과정 $\frac{2 \times 2}{3 \times 2}$ 는 전체 단위의 크기는 변하지 않고 조각을 더 잘게 분할하는 과정으로, 나뉜 조각의 개수는 늘어나지만 조각의 크기는 줄어드는 상황이다.

따라서 분수의 성질을 이용하여 동치분수를 만드는 방법은 이러한 분할 과정을 설명하는 데 어려움이 있을 수 있다. 재귀적 분할을 통해 동치분수를 만드는 방법은 [그림 2]와 같이 $\frac{2}{3}$ 를 먼저 표현하고 각각의 $\frac{1}{3}$ 을 다시 2등분하여 $\frac{4}{6}$ 를 만드는 것이다. $\frac{2}{3}$ 라는 하나의 대상을 다시 재분할하여 나타낸 것이므로 $\frac{4}{6}$ 로 표현하여도 그 양은 변하지 않는다는 것을 쉽게 확인할 수 있다.



[그림 2] 재귀적 분할을 이용한 동치분수 만들기

재귀적 분할(recursive partitioning)은 스테프(Steffe)(2003, 2004, 재인용: 이지영, 방정숙, 2016, p. 629)가 제시한 용어로 부분의 크기를 전체를 기준으로 해석하기 위해 각 부분을 다시 부분으로 분할하는 과정이다. 이 방법의 장점은 하나의 양을 $\frac{2}{3}$ 면서 $\frac{4}{6}$ 로도 표현할 수 있다는 것이다. [그림 1]과 비교하면 $\frac{4}{6}$ 를 나타내는 모델의 눈금을 표현한 방법이 서로 다르다는 것을 알 수 있다. [그림 1]은 전체 단위를 6등분 한 과정을 나타낸다면 [그림 2]는 전체 단위를 3등분한 다음, 다시 각각의 단위 구간을 2등분한 과정이 눈금의 굵기로 구분하여 제시되어 있다.

이러한 과정을 통해 학생들은 세 가지 수준의 단위를 이해하고 이를 융통적으로 사용하는 경험을 할 수 있다(Izsak et al., 2008). 또한 이 방법은 $\frac{2 \times 2}{3 \times 2}$ 가 분모에 2배 하고 분자에 2배를 하여 전체 단위가 2배가 되고 부분의 크기도 2배가 되는 상황이 아니라 분할하고 또 다시 분할하는 과정이라는 것이 잘 나타난다. 이 과정은 분모가 2등분되면 분자도 똑같이 2등분되는 과정을 설명하여 알고리즘 과도 연결할 수 있다. 또한 이 방법은 연산의 의미와 알고리즘에 대해 개념적으로 이해하는 데 도움이 되며 세 가지 수준의 단위는 추후 학습할 분수의 곱셈, 나눗셈에서 중요한 역할을 하므로(Steffe & Olive, 2010, 재인용: 이지영, 2016, p. 630), 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 충분히 경험할 기회를 제공해야 한다(이지영, 방정숙, 2016, p. 630).

자료 출처

- 이지영(2015). 『초등학교 학생들의 단위 추론을 기반으로 한 분수 나눗셈의 학습 경로 개발』. 한국교원대학교 박사 학위 논문.
- 이지영, 방정숙(2016). 『이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 교육 재고 - 단위 추론 및 재귀적 분할을 중심으로』. 『학교 수학』 18(3), 625-645.
- Izsak, A., Tillema, E., & Tunc-Pekkan, Z.(2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(1), 33-62.
- Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L.(2009). *Helping children learn mathematics (9th Ed.)*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 공역(2012). 『초등 교사를 위한 수학과 교수법』. 서울: 경문사.
- Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., & Reys, R. E.(1981). Decimals: Results and implications from national assessment. *The Arithmetic Teacher*, 34-37.

단원 도입

수업의 흐름

학습 동기 유발하기

선수 학습 내용 살펴보기

공부할 내용 살펴보기

+ 학습 동기 유발하기

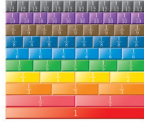
- 그림을 살펴보세요.
 - $\frac{3}{5}$ 와 $1\frac{1}{2}$ 을 분수 막대로 계산하려고 합니다.
- 어떤 질문이 있나요?
 - 분모가 달라서 어떻게 해야할지 생각하고 있습니다.
 - 어떤 분수 막대로 바꿀 수 있는지 생각하고 있습니다.

5

분수의 덧셈과 뺄셈

분수의 덧셈과 뺄셈을 알아볼까요?

$1\frac{3}{5} + 1\frac{1}{5}$ 을 분수 막대를 사용하여 계산해 보자!



분모가 다르니까 더하려면 다른 분수 막대로 바꿔야 할 거 같은데?



• 학습 동기 유발 그림은 이 단원의 '탐구 수학(106~107쪽)'의 일부 내용을 소재로 만든 것이다. 이 단원을 다 배우고 난 후에 다룰 내용이므로 여기서는 학생들의 학습 동기를 유발하는 정도로만 다룬다.

+ 선수 학습 내용 살펴보기 (『수학 익힘』 55쪽)

• 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 학습하기 전에 4학년 2학기에 학습했던 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈, 5학년 1학기 4단원에서 학습한 통분하기와 분수의 크기 비교 등의 학습 활동을 통하여 선수 학습에 대한 이해를 확인하고, 이번 단원에서 학습할 내용에 대한 선행 조직자를 형성한다.

배운 내용

- 분모가 같은 분수의 덧셈은 어떻게 해야 할까요? - 분모가 같은 분수의 덧셈에서는 분자끼리의 합이 계산 결과가 됩니다.
- $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$ 는 어떻게 계산해야 하는지 답해 볼까요?
 - 분모는 그대로 두고 분자끼리 더한 다음 가분수이면 대분수로 나타냅니다.
- $\frac{5}{6}$ 와 $\frac{4}{9}$ 를 통분하는 방법을 이야기해 볼까요?
 - 두 분모의 최소공배수를 공통분모로 하여 통분합니다.

• 필요한 경우 『수학 익힘』 55쪽의 문제를 풀어 보세요.

+ 공부할 내용 살펴보기

• 슬기와 지혜가 우리 쌀로 만드는 요리 한마당 준비를 위해 각자 여러 가지 재료를 가지고 와서 함께 쌀과자를 만드는 이야기이다. 이야기는 각 재료들로 쌀과자를 만들고 함께 마실 쌀음료를 준비한 후 만든 쌀과자를 포장하는 과정까지를 담고 있다. 일상생활에서 분수의 덧셈과 뺄셈을 사용하기에 가장 적합한 소재는 요리이기에

여러 재료들을 계량한 양을 더하고 빼는 활동을 통해 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 다양한 상황 속에서 찾아보게 한다. 이러한 활동을 통하여 이 단원에서 공부하게 될 학습 내용에 대한 흥미와 관심을 유발하고, 생활 속에서 발견할 수 있는 다양한 분수 연산에 대하여 비형식적인 지식을 형성할 수 있다.

들려줄 이야기

슬기와 지혜네 학교에서는 우리 쌀로 만드는 요리 한마당이 열려요. 요리 대회에서 슬기와 지혜는 쌀과자를 만들어 팔 계획이에요. 슬기와 지혜가 쌀과자를 만드는 데 필요한 재료를 각자 집에서 가지고 와 쌀과자를 만들기로 했어요. 슬기는 쌀가루 $1\frac{3}{5}$ 컵, 검은깨 $\frac{1}{3}$ 컵, 우유 $\frac{1}{2}$ 컵, 설탕 $\frac{3}{4}$ 컵을 가지고 있고 지혜는 쌀가루 $1\frac{1}{2}$ 컵, 검은깨 $\frac{4}{5}$ 컵, 우유 $\frac{1}{4}$ 컵을 가지고 왔어요. 지혜가 말했어요. "쌀과자 만드는 법을 보고 재료를 준비해 왔는데 이 정도면 될까?" 슬기가 말했어요. "쌀과자는 우유에 쌀가루를 넣어 반죽하고 검은깨와 설탕을 넣어 섞어 준 뒤 구우면 돼." 그러자 지혜가 말했어요. "어쩌지? 설탕을 깜빡 잊고 안 가지고 왔네." 슬기가 웃으며 답했어요. "괜찮아. 내가 넉넉하게 가지고 왔으니까 부족하지는 않을 거야." 지혜가 안도하며 말해요. "휴, 다행이다. 그럼 우리 둘이 가지고 온 재료를 합해서 반죽을 만들면 되겠구나. 친구들이 맛있게 먹을 생각을 하니 벌써부터 기분이 좋아." 슬기와 지혜는 맛있는 쌀과자를 만들기 시작했어요.

- 슬기와 지혜네 학교에서는 어떤 행사를 열 계획인가요?
 - 우리 쌀 소비를 홍보하려고 요리 한마당 대회를 열 계획입니다.
- 요리 대회에서 슬기와 지혜는 무엇을 팔기로 했나요?
 - 맛있는 쌀과자를 만들어 팔기로 했습니다.
- 쌀과자를 만드는 데 필요한 재료는 무엇인가요?
 - 쌀가루, 검은깨, 우유, 설탕입니다.



4-2 1. 분수의 덧셈과 뺄셈

$\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$ 를 계산하면 다음과 같습니다.

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

5-1 4. 약분과 통분

두 분수를 통분하면 다음과 같습니다.

$$\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{9}\right) \Rightarrow \left(\frac{5 \times 3}{6 \times 3} \cdot \frac{4 \times 2}{9 \times 2}\right) \Rightarrow \left(\frac{15}{18} \cdot \frac{8}{18}\right)$$

배운 내용
수학 4학년, 5학년

배울 내용

분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈이 다른 분수의 덧셈은 어떤 차이가 있을까요?

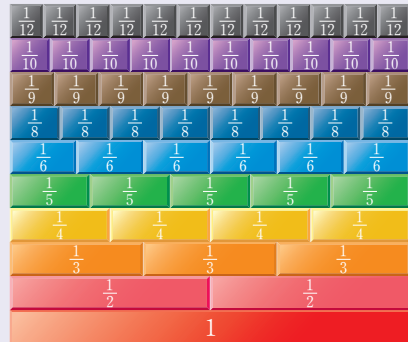
분모가 같은 분수의 뺄셈과 분모가 다른 분수의 뺄셈은 어떤 차이가 있을까요?

분수의 덧셈과 뺄셈을 여러 가지 방법으로 해결해 볼까요?

+ 수학 교과 역량

이런 활동을 할 수 있어요

- 분수 막대를 사용하여 단위분수의 합으로 나타내기 정보 처리



- ① 분수 막대를 사용하여 단위분수 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ 의 크기를 비교해 본다.
- ② $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ 인 분수 막대를 연결하여 크기가 $\frac{7}{8}$ 이 되도록 만들어 본다.

● 분수 막대를 사용하여 분수의 크기를 직관적으로 비교해 보고 단위분수의 합으로 나타낼 수 있는 분수를 만드는 활동을 통해 정보 처리 능력을 기를 수 있다.

● 여러분들도 요리를 해 본 경험이 있나요? - 방과 후 요리 교실에서 과자를 구워 본 경험이 있습니다. / 어머니와 빵을 만들어 본 적이 있습니다. / 실과 시간에 샌드위치를 만들어 보았습니다.

● 단원 그림과 관련하여 학생들이 다양한 사전 경험을 나누는 활동을 통해 이번 단원에 대한 흥미와 관심을 유발한다.

- 슬기와 지혜가 사용할 수 있는 우유의 양이 얼마나 되는지 구하려면 어떻게 해야 할까요? - 슬기가 가지고 있는 우유의 양과 지혜가 가지고 있는 우유의 양을 더합니다.
- 슬기와 지혜가 사용할 쌀가루와 검은깨의 양은 어떻게 구하면 될까요? - 슬기가 가지고 온 쌀가루의 양과 지혜가 가지고 온 쌀가루의 양을 더합니다. / 두 사람이 각각 가지고 온 검은깨의 양도 더합니다.
- 설탕의 양이 충분하지 알아보려면 어떻게 해야 할까요? - 쌀과자를 만드는 데 필요한 설탕의 양이 얼마나 되는지 먼저 알아야 합니다. / 슬기가 가지고 온 설탕의 양에서 필요한 설탕의 양을 빼줍니다.
- 만일 쌀과자를 만드는 데 필요한 설탕의 양이 $\frac{1}{4}$ 컵이라면 설탕의 양은 충분할까요? - $\frac{3}{4}$ 컵에서 $\frac{1}{4}$ 컵을 빼면 $\frac{2}{4}$ 컵이 남으므로 슬기가 가지고 온 설탕만으로도 충분히 쌀과자를 만들 수 있습니다.

- 『수학 4-2』에서 배운 분모가 같은 분수의 뺄셈을 상기시켜 $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ 을 계산하게 한다.
- 『수학 5-1』 4단원에서 학습한 두 분수의 크기 비교를 통한 방법으로도 알아볼 수 있게 한다.

- 두 친구가 가지고 온 우유의 양은 어떻게 구하면 될까요?
 - $\frac{1}{2}$ 컵과 $\frac{1}{4}$ 컵을 더하여 구합니다.
 - 두 양이 어느 정도 되는지 어려워 구해야 할 것 같습니다.

● 정확한 수식을 사용하기보다는 직관적으로 계산 결과를 예측해 보게 한다.

- 슬기와 지혜가 무엇을 하고 있나요?
 - 리본으로 과자 상자를 포장하고 있습니다.
- 누가 리본을 더 많이 사용했나요? - 지혜입니다.
- 지혜가 슬기보다 리본을 얼마나 더 많이 사용했는지 알아보려면 어떻게 해야 할까요? - $2\frac{1}{4}$ 에서 $1\frac{1}{2}$ 을 빼야 합니다.
- 어떻게 빼면 될지 이야기해 볼까요? - $\frac{1}{4}$ 이 $\frac{1}{2}$ 보다 작아서 진분수 끼리는 뺄 수 없습니다. / 대부분의 자연수 부분을 이용해야 할 것 같습니다.
- 지금까지 알아본 내용을 통하여 5단원에서는 무엇을 공부할지 생각해 보세요.
 - 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈에 대해 공부할 것 같습니다.

배울 내용

- 이 단원을 다 배우고 난 후 해결할 수 있어야 할 질문을 살펴보세요.
 - (배울 내용에 제시한 3가지 질문을 읽는다.)

- 여러 가지 요리 설명서를 보여 주고 요리에 사용되는 재료의 양을 나타낼 때 한 컵 반, $\frac{1}{4}$ 컵 등 '컵'을 단위로 사용한다는 것을 보여 줌으로써 실생활에서 분수의 쓰임을 확인하게 한다.
- 1차시의 활동은 학생들이 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 해야 할 필요성을 생각해 보는 활동이 중심이므로 직접적으로 공통분모의 필요성이나 통분 방법까지 설명할 필요는 없다.
- 이 단원에서 학습할 내용에 대한 관심과 호기심을 일으키기 위하여 학생들의 다양한 의견을 받아들이고, 서로의 생각을 이야기할 수 있는 자유로운 분위기를 만든다.
- 배울 내용은 1차시에서 답을 찾는 것이 아니라 본 단원을 모두 배운 후에 답할 수 있는 내용으로 구성된 것임에 유의한다.