

탐구 수학 재미있는 수의 규칙을 알아볼까요

학습 목표

- 우박수의 규칙을 찾을 수 있다.
- 단원의 특성에 맞는 창의·융합 프로젝트를 수행할 수 있다.

수업의 흐름

- 도입** 우박수 알아보기
- 전개** 우박수 계산하기
- 정리** 가장 긴 우박수 만들기

준비물

계산기	교사용 1개, 개인별 1개(2, 3)
-----	----------------------

1 우박수 알아보기

마지막으로 간 곳은 스마트 체험실이었어요. 지혜, 도영, 수일, 슬기는 새로운 수학자를 만날 생각에 기분이 들었어요. “스마트 체험실에서 여러분이 만날 분은 1937년에 박사 학위를 받은 독일의 젊은 수학자 로타어 콜라츠(Lothar Collatz, 1910~1990)라는 분이예요. 콜라츠 박사님은 아주 단순하면서도 재미있는 문제를 제시하였어요. 박사님의 이름을 따서 ‘콜라츠의 추측’이라 불리는 이 문제에 대해 한번 알아볼까요?” 친구들은 단순하면서도 들쭉날쭉한 수의 변화에 신기해하며 눈을 크게 뜨고 규칙을 찾기 시작했어요.

1 활동의 주안점

- 독일의 수학자 콜라츠가 발견한 수의 규칙을 탐구해 보며 수가 표현되는 과정과 결과에 대한 관심과 호기심을 유발시킨다.

2 활동 방법

① 콜라츠의 우박수 계산 규칙 탐구하기

- 친구들과 함께 콜라츠가 찾아낸 수의 계산 규칙을 나타내는 자료를 보며 특징을 발견해 보도록 한다.

② 콜라츠의 계산 규칙에 따라 한 자리 수부터 계산하여 과정 살펴 보기

3 핵심 발문

- 수의 규칙을 발견한 학자는 누구인가요?
- 독일의 수학자 콜라츠 박사입니다.
- 스마트 체험실을 찾은 친구들이 무엇을 궁금해하고 있나요?
- 재미있는 수의 규칙이 무엇인지 궁금해하고 있습니다.



재미있는 수의 규칙을 알아볼까요

1 우박수를 알아봅시다.



독일의 수학자 로타어 콜라츠(1910~1990)는 1937년에 아주 단순하고 재미있는 문제를 냈습니다. 그의 이름을 따서 ‘콜라츠의 추측’이라고 불리는 ‘우박수’ 문제는 다음과 같습니다.

콜라츠의 우박수 계산 규칙

- ① 자연수를 하나 고릅니다.
- ② 고른 수가 짝수이면 2로 나누고, 홀수이면 3을 곱하고 1을 더합니다.
- ③ ②의 과정을 반복하면 그 결과는 항상 1이 됩니다.

예를 들어 처음 고른 수가 5이면 5는 홀수이므로 5에 3을 곱하고 1을 더하면 16이 됩니다. 16은 짝수이므로 2로 나누면 8이 됩니다. 이런 과정을 계속 반복하면 결과는 다음과 같습니다.

$$5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

이처럼 수가 커졌다 작아졌다를 반복하다가 어느 순간 계속 작아져서 1이 되는 모습이 마치 우박이 구름 속에서 오르내리며 자라다가 땅 위로 떨어지는 것과 비슷하다는 뜻에서 ‘우박수’라고 부릅니다.

• 우박수의 계산 규칙은 무엇인가요?

- 짝수이면 2로 나누고, 홀수이면 3을 곱하고 1을 더하는 규칙입니다.

• 콜라츠가 발견했던 수의 계산 과정을 살펴보세요.

- (148쪽에 제시되어 있는 5로 시작하는 우박수 계산 과정을 살펴 본다.)

• 마지막 수는 무엇인가요?

- 1입니다.

• 4, 5, 6의 수를 차례로 계산하여 과정을 적어 보고 결과를 친구들과 비교해 보세요.

- (자신이 나타낸 우박수 계산 결과를 친구들과 비교해 본다.)

• 우박수가 길어지려면 어떤 수를 골라야 할까요?

- 큰 수로 시작합니다.
- 짝수보다는 홀수로 시작하는 것이 좋습니다.

• 콜라츠가 찾아낸 우박수 계산 규칙의 특징을 발견해 보도록 한다.

2 우박수 계산하기

1 활동의 주안점

- 우박수 계산 규칙을 바탕으로 우박수를 계산해 가는 기회를 제공한다.

2 활동 방법

① 우박수의 계산 규칙에 따라 주어진 수를 계산하는 과정 살펴보기

- 우박수의 계산 규칙을 적용하여 수가 어떻게 변하는지를 확인한 후 과정을 기록하며 나타내어 본다.
- 규칙성이 발견되는지 비교하며 나타내어 본다.

+ 수학 교과 역량

『수학』에서 이런 교과 역량을 지도할 수 있어요

1 우박수 알아보기 추론 창의·융합 의사소통 정보 처리

- 콜라츠가 찾아냈던 방법을 나타내는 자료를 분석하여 특징을 발견하는 과정에서 추론, 창의·융합 및 의사소통 능력을 기를 수 있다.
- 우박수 계산 규칙에 따라 수를 계속해서 변환하여 나타내는 과정에서 정보 처리 능력을 기를 수 있다.

우박수의 규칙성을 찾을 수 있는 다양한 수의 사례를 찾아보는 과정에서 규칙 찾기의 흥미와 창의성을 자극할 수 있다.

3 가장 긴 우박수 만들기 추론 창의·융합 정보 처리

- 우박수의 다양한 사례를 나열해 보는 과정에서 정보를 분석하고 추론하는 능력을 기를 수 있다.
- 가장 긴 우박수를 만들어 보는 과정에서 규칙 찾기와 관련된 창의·융합 능력을 기를 수 있다.
- 긴 우박수를 나열하여 그 속에서 패턴을 찾아내는 활동을 통하여 주어진 정보를 분석하고 해석하는 정보 처리 능력을 기를 수 있다.

2 짝과 함께 우박수의 계산 규칙에 따라 빈칸을 채워 봅시다.

3 모둠 친구들과 우박수 만들기 놀이를 해 봅시다. 50보다 작은 수를 이용하여 우리 반에서 가장 긴 우박수를 찾아봅시다.

6

규칙 찾기

6. 규칙 찾기 | 149

3 핵심 발문

- 11로 시작한 우박수의 변화 과정을 살펴보세요.
 - (11로 시작하는 우박수 계산 과정을 살펴본다.)
- 15로 시작한 우박수의 변화 과정을 살펴보세요.
 - (15로 시작하는 우박수 계산 과정을 살펴본다.)
- 마지막 수는 무엇인가요?
 - 1입니다.

3 가장 긴 우박수 만들기 과정 중심 평가

1 활동의 주안점

- 모둠 친구들과 가장 긴 우박수 만들기 놀이를 해 보고, 결과를 비교해 본다.

2 활동 방법

- 1 짝끼리 혹은 모둠 친구들과 1부터 50 사이에 있는 수를 하나씩 정하기
- 2 우박수 놀이판에 규칙에 맞게 우박수를 채워 보기
- 3 친구들과 만든 우박수를 비교하면서 가장 긴 우박수를 만들기 위한 전략을 생각해 보기

3 핵심 발문

- 긴 우박수를 만들려면 시작하는 수를 어떤 수로 해야 할까요?
- 친구들과 비교한 우박수를 살펴 보면서 규칙을 찾아보세요.
 - 십의 자리 숫자가 1인 수들의 우박수, 십의 자리 숫자가 3인 수들의 우박수…… 등이 있습니다.

+ 3에서 과정 중심 평가를 해 볼까요

- 평가 내용: 콜라츠의 우박수 계산 규칙을 이해하고 그 규칙을 설명해 보고 만들어 본다. 추론 창의·융합 의사소통 태도 및 실천

평가 방법		평가 도구
관찰		전자 저작물 체크리스트
유의 사항	콜라츠의 우박수 계산 규칙을 이해하고 만들어 보는 활동을 통해 계산 결과의 규칙을 추측하고 수의 변화를 확인하는 데 중점을 두고 지도한다.	

학습 정보	지도 방안 예시
긴 우박수 만들기를 해결하고 그 과정을 설명할 수 있는 경우	수학책에 제시된 표보다 더 긴 우박수를 만들 수 있는 방법에는 어떤 것이 있을지 탐구해 보도록 한다.
우박수 만들기의 계산 과정을 이해할 수 있지만, 긴 우박수 만들기를 해결할 수 없는 경우	같은 문제 상황에 대해서 친구들과 다양한 표현을 이야기해 보도록 하고, 친구들의 표현과 자신의 표현의 공통점과 차이점을 찾아보고 생각해 보도록 한다.
우박수 만들기의 방법을 이해하지 못하는 경우	쉬운 상황에서의 규칙 찾기 문제를 해결하고 해결 방법을 간단하게 말해 보도록 한다.

4 수 배열의 규칙에 따라 빈칸에 알맞은 수를 써넣으세요.



5 계산식의 규칙에 따라 빈칸에 알맞은 식을 써넣으세요.

$$500 + 900 = 1400$$

$$500 + 1900 = 2400$$

$$500 + 2900 = 3400$$

$$500 + 4900 = 5400$$

6 규칙에 따라 빈칸에 알맞은 모양을 그리고 색칠해 보세요.

								<input style="width: 50px; height: 50px;" type="text"/>
								<input style="width: 50px; height: 50px;" type="text"/>

정답 1 50106, 50308 2 (위에서부터) 1, 4, 5, 40, 75, 125 3 3104, 5204 4 11017 5 $500 + 3900 = 4400$ 6



4 수 배열의 규칙에 따라 빈칸에 알맞은 수를 써넣으세요.



5 계산식의 규칙에 따라 빈칸에 알맞은 식을 써넣으세요.

$$300 \times 900 = 270000$$

$$500 \times 900 = 450000$$

$$700 \times 900 = 630000$$

$$1100 \times 900 = 990000$$

6 규칙에 따라 빈칸에 알맞은 모양을 그리고 안에 알맞은 수를 써넣으세요.

1
5
13
25

정답 1 120000003, 130002003, 140003003 2 (위에서부터) 1, 4, 5, 400, 750, 1250 3 400, 8000 4 55000, 67000

5 $900 \times 900 = 810000$ 6 41