2 평면도형

단원 개관

평면도형은 구성 요소의 특성에 따른 분류 활동을 통하여 다양하게 범주화되며, 각각의 평면도형에는 고유한 성질이 있다. 평면도형이나 입체도형의 개념과 성질에 대한 이해는 실생활 문제를 해결하는 데 기초가 되며, 수학의 다른 영역의 개념과 밀접하게 관련되어 있다. 또한 도형을 다루는 경험으로부터 비롯되는 공간 감각은 수학적 소양을 기르는 데 도움이 된다. 삼각형, 사각형, 원 등과 같은 기본적인 평면도형은 이미 1~2학년군에서 직관적으로 다루었다. 이 단원에서는 이전 학년에서 경험한 비형식적 활동을 바탕으로 평면도형의 정의와 성질을 조금 형식적으로 다루게 된다. 구체적으로는 선분, 반직선, 직선 등과 같은 용어를 알아보고 이를 통하여 각을 도입한다.

각은 삼각형이나 사각형과 같은 다각형의 지도를 위하여 선행되어야 할 내용이다. 각을 지도함으로써 각이라는 개념이 우리 생활과 얼마나 밀접한 관계가 있는지를 알게 하고, 각의 성질을 이용한 생활용품이 많다는 것을 알게 한다. 여러 크기의 각 중에 직각은 특히 우리 생활의 도처에서 발견되는 개념으로 직각의 이해는 도형의 기본적인 개념 이해를 통하여 우리의 실제 생활을 이해하는 데 큰 효과를 발휘한다. 또한 직각을 이용하여 직각삼각형, 직사각형, 정사각형을 도입한다. 직각삼각형은 1~2학년군에서 이미 배운 삼각형의 개념 중에 한 각이 직각인 삼각형이라는 방식으로 이해하고, 특히 여러 가지 삼각형 중에서 직각삼각형이 우리 생활과 밀접하게 연관되어 있고, 그 효용도가 높음을 알게 한다. 직사각형은 우리들에게 가장 친근하고 효용성이 높은 도형으로 직각이 4개씩 들어 있는 사각형이라는 방식으로 이해한다. 정사각형은 직사각형 중 네 변의 길이가 모두 같은 특별한 직사각형으로 이해한다.

학생들은 1, 2학년에 이어 3학년에서도 일상생활과 관련된 경험을 충분히 해야 하고, 이를 통해 도형의 개념을 구성하는 요소 가운데 비본질적인 것을 걷어 내고 본질을 이끌어 내는 추상화의 사고를 경험하게 된다. 그뿐만 아니라 직관에 기초한 관찰이나 구체적 조작 활동으로 도형의 아름다움을 느끼고 도형의 핵심 개념과 원리를 이끌어 내는 것이 바람직하다.

준비할 교구: 자, 접자, 직각 삼각자, 11×11 또는 5×5 도형판

단원 학습 계열

선수 학습

- 원, 삼각형, 사각형을 직관적으로 이해하고 분류하기
- 원, 삼각형, 사각형의 모양 알아보기
- 원, 삼각형, 사각형의 모양을 이용하여 다양한 모양 꾸미기 (1－2, 3. 여러 가지 모양)
- 원, 삼각형, 사각형 알아보기
- 꼭짓점, 변을 알고 찾기
- 오각형, 육각형을 알고 구별하기 (2－1, 2. 여러 가지 도형)

→

본학습

- 선분, 반직선, 직선 알아보기
- 도형으로서의 각 알아보기
- 직각 알아보고 실생활에서 찾기
- 직각삼각형 알아보기
- 직사각형 알아보기
- 정사각형 알아보기

→

후속 학습

- 원의 중심, 반지름, 지름 알아보기
- 컴퍼스로 원 그리기 (3－2, 3. 원)
- 이등변삼각형, 정삼각형 알아보기
- 예각삼각형, 둔각삼각형 알아보기 (4－2, 2. 삼각형)
- 수직과 수선, 평행과 평행선 알아보기
- 사다리꼴, 평행사변형, 마름모 알아보기 (4－2, 4. 사각형)
- 다각형, 정다각형 알아보기
- 대각선 알아보기(4－2, 6. 다각형)

교육과정

2015 개정 수학과 교육과정	
성취기준	[4수02-01] 직선, 선분, 반직선을 알고 구별할 수 있다. [4수02-02] 각과 직각을 이해하고, 직각과 비교하는 활동을 통하여 예각과 둔각을 구별할 수 있다. [4수02-09] 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통하여 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형을 이해한다. [4수02-10] 여러 가지 모양의 사각형에 대한 분류 활동을 통하여 직사각형, 정사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모를 알고, 그 성질을 이해한다.

〈교수 · 학습 방법 및 유의 사항〉

- 구체적인 사례나 활동을 통하여 각을 도입하고, 각의 변이 반직선임을 알게 한다.
- 여러 가지 삼각형과 사각형을 이름 짓는 활동을 통하여 각 도형의 정의에 대해서 학생들 스스로 사고하게 한다.
- 도형 영역의 문제 상황에 적합한 문제 해결 전략을 지도하고, 문제 해결 과정을 설명하게 하여 문제 해결 능력을 기르게 한다.

단원 학습 목표

영역	단원 학습 목표
내용	1. 선분, 직선, 반직선을 알고 구별할 수 있다. 2. 각의 의미를 알고 생활 주변에서 각을 찾을 수 있다. 3. 직각을 이해하고 생활 주변에서 직각을 찾을 수 있다. 4. 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통하여 직각삼각형을 이해할 수 있다. 5. 여러 가지 모양의 사각형에 대한 분류 활동을 통하여 직사각형을 이해할 수 있다. 6. 여러 가지 모양의 사각형에 대한 분류 활동을 통하여 정사각형을 이해할 수 있다.
교과 역량	1. 실제로 한 치의 오차도 없이 곧거나 끝없이 이어지는 선을 볼 수 없지만 주어진 선을 선분, 반직선, 직선 등으로 구분할 수 있다. 추론 정보 처리 태도 및 실천 2. 사물에서 색이나 크기 등의 비본질적인 요소를 버리고, 각이나 변 등과 같은 평면도형의 기본 요소에 주목하고 추상화할 수 있다. 추론 태도 및 실천 3. 생활에서 다양하게 경험한 도형의 예를 통해 수학이 일상생활과 밀접하게 관련되어 있음을 느낀다. 추론 태도 및 실천 4. 그리기, 만들기, 분류하기 등의 다양한 조작 활동을 통해 수학에 흥미를 가진다. 태도 및 실천 5. 도형의 여러 성질들을 말이나 그림, 기호 등을 이용하여 표현하거나 다른 사람의 표현을 보고 들으며 이해할 수 있다. 추론 창의 · 융합 의사소통 정보 처리 태도 및 실천 6. 평면도형을 이용하여 다양한 모양을 만들고 그 속에 숨겨진 평면도형을 찾을 수 있고, 이를 통해 창의적인 생각을 할 수 있다. 문제 해결 창의 · 융합 정보 처리 태도 및 실천 7. 탐구 문제 해결 과정을 친구들과 함께 해결해 보는 활동을 하면서 다른 사람을 배려하고 존중하며 협력하는 태도를 실천할 수 있다. 태도 및 실천

단원의 흐름

1차시
단원 도입

2차시
선의 종류에는 어떤 것이 있을까요

3차시
각을 알아볼까요

4차시
직각을 알아볼까요

5차시
직각삼각형을 알아볼까요

6차시
직사각형을 알아볼까요

7차시
정사각형을 알아볼까요

8차시
생각 수학
그림 속에 숨은 도형의 수를 찾아볼까요

9차시
얼마나 알고 있나요

10차시
탐구 수학
놀이터를 만들어 볼까요

선분, 반직선, 직선 개념을 바탕으로 각, 직각, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형 등의 개념을 이해하고, 이들 도형의 기본적인 성질을 표현할 수 있다. 또한 생활에서 다양하게 경험한 도형의 예를 서로 이야기하는 과정에서 수학이 일상생활과 밀접하게 관련되어 있음을 경험할 수 있고, 평면도형과 관련된 문제 해결 및 탐구 학습 과정을 통해 수학 교과 역량을 강화할 수 있다.

단원의 전개 계획

차시 『수학』 쪽수	주제	수업 내용 및 활동	교과 역량	준비물	『수학 익힘』 쪽수
1차시 28~29쪽	단원 도입	• 선수 학습 내용을 확인한다. • 단원 도입 그림을 보면서 평면도형을 찾아보게 한다. • 생활 주변에서 볼 수 있는 다양한 평면도형을 그리거나 평면도형에 이름을 붙여 보게 한다.			19쪽
2차시 30~33쪽	선의 종류에는 어떤 것이 있을까요	• 미끄럼틀에서 곧은 선과 굽은 선을 찾아보게 한다. • 선분, 반직선, 직선의 의미를 알게 하고 표현해 보게 한다.	창의 · 융합 의사소통 정보 처리 태도 및 실천	자	20~21쪽
3차시 34~35쪽	각을 알아볼까요	• 반직선을 이용하여 각의 개념을 알게 하고 표현해 보게 한다. • 다양한 각을 만들고 본을 떠 보게 한다. • 각의 구성 요소를 알고 각을 그려 보게 한다.	문제 해결 추론 창의 · 융합 의사소통	자, 접자	22~23쪽
4차시 36~37쪽	직각을 알아볼까요	• 직각의 의미를 알고 표현할 수 있게 한다. • 생활 주변에서 직각을 찾아보게 한다.	문제 해결 추론 창의 · 융합 의사소통	종이, 직각 삼각자	24~25쪽
5차시 38~39쪽	직각삼각형을 알아볼까요	• 분류 활동으로 직각삼각형을 알 수 있게 한다. • 여러 가지 직각삼각형을 만들고 그릴 수 있게 한다. • 생활 주변에서 직각삼각형을 찾을 수 있게 한다.	추론 창의 · 융합 의사소통 정보 처리 태도 및 실천	색종이, 가위, 도형판, 고무줄, 자, 직각 삼각자	26~27쪽
6차시 40~41쪽	직사각형을 알아볼까요	• 분류 활동으로 직사각형을 알 수 있게 한다. • 여러 가지 직사각형을 만들고 그릴 수 있게 한다. • 생활 주변에서 직사각형을 찾을 수 있게 한다.	추론 창의 · 융합 의사소통 정보 처리 태도 및 실천	직각 삼각자, 자	28~29쪽
7차시 42~43쪽	정사각형을 알아볼까요	• 분류 활동으로 정사각형을 알 수 있게 한다. • 정사각형을 만들고 그릴 수 있게 한다.	추론 창의 · 융합 의사소통 정보 처리 태도 및 실천	직각 삼각자, 직사각형 모양 종이, 가위, 자	30~31쪽
8차시 44~45쪽	[생각 수학] 그림 속에 숨은 도형의 수를 찾아볼까요	• 직각삼각형과 정사각형을 이용하여 나만의 동물을 만들고 그 속에 숨은 도형의 수를 찾아보게 한다. • 직사각형 모양 조각으로 색칠된 부분을 덮어 보고 도형의 수를 찾아보게 한다.	문제 해결 창의 · 융합 의사소통 정보 처리 태도 및 실천		
9차시 46~47쪽	[얼마나 알고 있나요]	• 다양한 문제를 해결하며 이 단원에서 배운 내용을 정리하게 한다.	문제 해결 추론 창의 · 융합 의사소통 정보 처리 태도 및 실천	자, 직각 삼각자	
10차시 48~49쪽	[탐구 수학] 놀이터를 만들어 볼까요	• 창의 · 융합 활동을 할 수 있게 한다.	추론 창의 · 융합 의사소통 태도 및 실천	만들기 재료	

단원 지도 유의 사항

① 도형 개념을 이끌어 내기 위해 일상생활의 사물을 활용하지만 사물 그 자체가 도형이 아님을 주의해야 한다. 도형은 사물의 여러 특성 가운데 점, 선, 면과 같은 기본 요소가 추상화된 개념이다.

② 반직선과 직선을 유한한 종이에 그리기 어렵다는 것을 알게 하고 유한한 선분을 이용하여 반직선이나 직선을 표현하는 방법을 익히게 한다.

③ 각을 도형으로 인식하지 못하는 경우가 많다. 도형의 의미를 떠올리게 하고 각 역시 한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형임을 알게 한다.

④ 직각삼각형을 직삼각형, 직사각형을 직각사각형이라는 식으로 두 용어를 혼동하는 경우가 종종 있다. 두 용어를 비교해 보게 하는 활동을 통하여 용어의 혼동을 줄여 줄 수 있다.

단원 학습 평가

영역	평가 내용	관련 차시	평가 방법
내용	1. 선분, 직선, 반직선을 알고 구별할 수 있는가?	2	지필, 구술
	2. 각의 의미를 알고 생활 주변에서 각을 찾을 수 있는가?	3	지필, 구술
	3. 직각을 이해하고 생활 주변에서 직각을 찾을 수 있는가?	4	관찰, 구술
	4. 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통하여 직각삼각형을 이해할 수 있는가?	5	관찰, 지필
	5. 여러 가지 모양의 사각형에 대한 분류 활동을 통하여 직사각형을 이해할 수 있는가?	6	관찰, 지필
	6. 여러 가지 모양의 사각형에 대한 분류 활동을 통하여 정사각형을 이해할 수 있는가?	7	관찰, 지필
교과 역량	1. 주어진 선을 선분, 반직선, 직선 등으로 구분할 수 있는가? 추론 정보 처리 태도 및 실천	1~7	관찰, 질문, 면담
	2. 구체물로부터 도형의 기본 요소를 이끌어 내어 도형의 개념을 형성하고 추상화할 수 있는가? 추론 태도 및 실천	1~7	관찰, 질문, 면담
	3. 도형이 자신의 일상생활과 밀접하게 관련되어 있음을 알 수 있는가? 추론 태도 및 실천	전체	관찰, 질문, 면담
	4. 그리기, 만들기, 분류하기 등을 통해 수학에 흥미를 느끼는가? 태도 및 실천	전체	관찰, 질문, 면담
	5. 도형의 여러 성질들을 말이나 그림, 기호 등을 이용하여 표현하거나 다른 사람의 표현을 보고 들으며 이해할 수 있는가? 추론 창의 · 융합 의사소통 정보 처리 태도 및 실천	전체	관찰, 질문, 지필
	6. 창의적인 생각을 바탕으로 다양한 모양을 만들어 숨겨진 도형 찾기 활동을 할 수 있는가? 문제 해결 창의 · 융합 정보 처리 태도 및 실천	8	관찰, 프로젝트
	7. 문제 해결 과정을 친구들과 함께 고민하고 해결해 보는 활동을 통하여 다른 사람을 배려하고 존중하며 협력하는 태도를 실천할 수 있는가? 태도 및 실천	전체	자기 평가, 동료 평가

과정 중심 평가에 따른 지도 방안 예시

1. 내용

평가 목표	여러 가지 모양의 사각형에 대한 분류 활동을 통하여 정사각형을 이해할 수 있다.
평가 방법	관찰, 지필, 질문, 면담, 구술
평가 도구	전자 저작물 체크리스트
유의 사항	다양한 크기와 모양의 사각형을 기준에 따라 직접 분류해 보면서 정사각형을 이해할 수 있도록 지도한다.

평가로 파악한 학습 정보	지도 방안 예시
정사각형의 뜻을 정확하게 이해하는 경우	• 정사각형이 아닌 도형을 제시하여 정사각형이 아닌 이유를 설명해 보게 한다. • 색종이를 이용하여 다양한 정사각형을 만들어 보게 한다.
변의 길이가 모두 같은 사각형이라고만 이해하는 경우	• 마름모 모양을 제시하여 정사각형이라고 말할 수 있는지 질문한다. • 정사각형이 되기 위해 어떤 조건이 더 있어야 하는지 생각해 보게 한다.
각의 크기가 모두 같은(네 각이 모두 직각인) 사각형이라고만 이해하는 경우	• 네 변의 길이가 같지 않은 직사각형을 제시하여 정사각형이라고 말할 수 있는지 질문한다. • 정사각형이 되기 위해 어떤 조건이 더 있어야 하는지 생각해 보게 한다.
'모두'라는 말을 빼고 변의 길이가 같고 각이 직각인 사각형이라고 이해하는 경우	• 두 변의 길이만 같은 사각형 또는 두 각의 크기만 직각인 사각형을 제시하여 정사각형이라고 말할 수 있는지 질문한다. • 정사각형이 되기 위해 어떤 조건이 더 있어야 하는지 생각해 보게 한다.
정사각형의 뜻과 관련된 어떤 조건도 이해하지 못하는 경우	• 정사각형과 그렇지 않은 사각형을 제시하여 다른 점이 무엇인지 찾아보게 한다. • 다른 점을 찾은 것을 바탕으로 정사각형의 뜻을 이해할 수 있도록 도와준다.

2. 교과 역량

평가 목표	구체물에서 각의 기본 요소를 이끌어 내어 각의 개념을 형성하고 추상화할 수 있다. 추론 정보 처리 태도 및 실천
평가 방법	관찰, 지필, 구술
평가 도구	전자 저작물 체크리스트, 전자 저작물 형성 평가 문항
유의 사항	직각의 정의 자체가 추상적이므로 구체물을 통해 직관의 방법으로 개념을 확장할 수 있도록 한다.

평가로 파악한 학습 정보	지도 방안 예시
구체물에서 제시된 각들의 공통점을 찾지 못하는 경우	• 제시된 구체물 외에도 직각을 포함하고 있는 더 많은 구체물들을 제시하여 공통점을 찾아보도록 한다. • 비례가 될 수 있는 직각을 포함하지 않은 구체물들을 제시하여 공통점이 없는 경우도 확인할 수 있도록 한다.
직각의 개념을 어려워하는 경우	• 원 모양이 아닌 종이도 반듯하게 두 번 접었을 때 직각이 생기는 것을 알 수 있도록 한다. • 종이를 반듯하게 두 번 접었을 때 생긴 각을 직각 삼각자에 맞대어 겹쳐 보면서 직관적으로 확인할 수 있도록 한다.
실생활에서 직각을 찾는 것을 어려워하는 경우	• 직각의 개념을 다시 확인하고, 종이로 만든 직각이나 직각 삼각자를 대어 보며 직각을 찾는 활동을 반복하게 한다. • 직각을 찾을 때 종이로 만든 직각이나 직각 삼각자를 먼저 대어 보고 확인하기 전에 실생활에서 찾은 각이 직관적으로 직각인지를 판단하고 확인하는 방법으로 지도할 수도 있다.

단원 배경 지식

1. 3학년 1학기 평면도형 단원의 특징

초등학교 3학년의 도형 영역에서는 1, 2학년에서 학습한 평면도형에 대한 직관적인 이해를 바탕으로 보다 다양한 평면도형을 본격적으로 학습하게 된다. 여기서는 1, 2학년에서의 도형 단원의 학습과 3학년에서의 도형 단원의 학습의 차이가 나는 주요 특징을 살펴본 다음 도형 학습의 근간이 되는 기하학과 이 단원과 어떤 관련성이 있는지를 살펴보자.

가. 수집·관찰 단계 중심에서 조작·실험 단계 중심으로

도형 학습 단계를 크게 구체물의 수집·관찰 단계, 조작·실험 단계, 이론화 단계로 구분하여 제시하고 있다. 수집·관찰 단계는 여러 구체물을 관점에 따라 수집하고 분류함으로써 공통성을 발견하고 분류하는 과정에서 그 공통성을 일상적인 용어로 명명하여 적절히 추상화한다. 이 단계에서는 구체물의 모양을 비교하거나 성냥개비, 종이, 색 막대, 쌓기나무 등의 구체물을 이용하여 여러 가지 모양을 구성하거나 모양이라는 측면에서 같은 것과 다른 것을 비교·분류하는 활동을 한다.

조작·실험 단계에서는 도형의 특징을 관찰하고 구성 요소를 조사하여 간단한 성질을 발견한다. 학생들은 도형을 표상하고, 도구를 사용하여 도형을 구성하는 실험을 한다. 또 학생들의 효율적인 의사소통과 추론을 유도하기 위해 적절한 수학적 용어를 도입한다. 이 단계는 도형의 구성 요소와 간단한 성질을 실험하고 발견함으로써 개념의 특수에서 일반으로 진행하는 이론화 준비 단계로 볼 수 있다. 이때의 조작·실험 활동으로 다음을 할 수 있다.

- 도형을 분할·합성하여 구성하기(종이접기, 오리기, 겹쳐 포개기)
- 실험하고 특정하기(칠교판, 펜토미노 활동)
- 적절한 도구를 사용하여 작도하기

이론화 단계는 일반적인 개념에서 특수한 개념으로 심화하고, 간단한 추론이나 초보적 논리로 사고하는 단계로, 기본적인 도형의 성질과 그들 사이의 상호 관계를 이해하거나 도형의 성질을 발견하는 과정에서 간단한 추론을 적용하거나 평면도형과 입체 도형의 상호 관련성을 파악하는 내용을 다룬다.

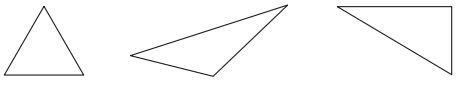
위의 같은 3단계 지도 단계를 고려할 때 3학년의 도형 단원은 수집·관찰 단계를 포함한 조작·실험 단계로 볼 수 있다. 실제로 이 단원에서는 생활 주변을 관찰하면서 직선, 반직선, 각, 직각, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형의 개념들을 도입하고, 자를 사용하여 그리기, 종이나 도형판을 사용하여 만들기, 모눈종이에 그리기 등의 활동을 하도록 하고 있다.

나. 도형의 예시적 정의와 명명적 정의

1학년 2학기 3단원 여러 가지 모양 단원에는 일상용어와 △와 □ 모양으로 삼각형과 사각형을 직관적으로 파악하도록 하였고, 2학년 1학기에 삼각형, 사각형의 개념을 다음과 같이 예시적으로 도입하였다.

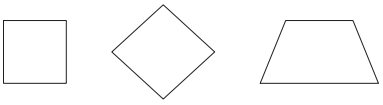
2학년 1학기 2단원 — 삼각형의 도입

그림과 같은 모양의 도형을 삼각형이라고 합니다.



2학년 1학기 2단원 — 사각형의 도입

그림과 같은 모양의 도형을 사각형이라고 합니다.



위와 같이 개념을 처음 도입하거나 학습 수준이 매우 낮은 입문기 학생들에게는 학습자에게 익숙한 예를 제시하여 시각적, 직관적으로 이해가 가능하도록 설명하는 방법인 예시적 정의가 사용된다. 그러나 도형 학습이 본격적으로 시작되는 3학년에서는 이와는 다르게 개념의 내포를 이용한 명명적 정의가 사용된다. 명명적 정의는 상위 개념에 종차를 첨가하여 새로운 하위 개념을 형성하는 방법으로 도형 개념 상호 간의 관계에 바탕을 두고 있다. 예를 들어 이 단원에서 직각삼각형은 '한 각이 직각인 삼각형'으로 정의된다. 즉, 상위 개념인 삼각형 중에서 직각이라는 구성 요소를 가진 하위 개념으로 직각삼각형이 정의되고 있다.

이와 같은 명명적 정의와 관련하여 다음과 같은 지도 방법이 있다.

(1) 도형의 구성 요소에 착안하여 정의한다. 도형의 구성 요소인 꼭짓점, 각, 변, 모서리, 면의 수를 조사하고, 그들의 위치 관계를 조사하여 도형의 용어를 자연스럽게 정의한다.

(2) 새로운 용어는 가능하면 상위 개념과 관련하여 정의한다. 도형 상호 간의 관계를 이해할 수 있도록 상위 개념에 종차를 첨가해서 하위 개념을 점진적으로 도입한다.

(3) 정의된 용어는 자주 사용하고 가급적 수정하지 않는다. 구체물에서 추상화한 도형 용어는 자주 사용하지 않으면 다른 용어의 간섭을 받아 잊기 쉽다. 따라서 약속한 용어를 일상적으로 사용함으로써 그 성질까지 발견하게 한다.

(4) 학생 주도적 활동의 구성주의에서는 학생들이 용어를 '만드는 기회'를 중시한다. 따라서 용어를 '주어진 것'이기보다는 학생들과 적절히 협의하면서 약속하여 그들이 '만드는 것'으로 느끼는 것이 바람직하다.

특히 위의 네 번째 제안과 관련하여 2015 수학과 교육과정에서는 도형 영역의 교수·학습 방법 및 유의 사항으로 "여러 가지 삼각형과 사각형을 이름 짓는 활동을 통하여 각 도형의 정의에 대해서 학생들 스스로 사고하게 한다."라고 되어 있다. 이에 따라 이 단원에서는 도형의 이름을 학생들이 지어보도록 하는 활동을 포함하도록 하였다.

다. 개념 간의 위계적 관계

명명적 정의와 함께 3학년 도형 학습부터는 도형의 개념들이 좀 더 체계적이고 위계적으로 도입된다. 직각삼각형과 직사각형은 각각 '한 각이 직각인 삼각형', '네 각이 모두 직각인 사각형'으로 약속한다. 여기서 새롭게 등장하는 개념인 직각은 '(주어진) 그림과 같이 종이를 반듯하게 두 번 접었을 때 생기는 각'으로 약속하고, 각은 다시 '한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형'으로 약속한다. 여기서 다시 새롭게 등장하는 반직선은 '한 점에서 시작하여 한쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선'으로 약속한다. 이와 같은 개념 사이의 관계를 정리하면 다음과 같다.

직사각형 직각삼각형	네 각이 모두 직각인 사각형 한 각이 직각인 삼각형
⇧	
직각	종이를 반듯하게 두 번 접었을 때 생기는 각
⇧	
각	한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형
⇧	
반직선	한 점에서 시작하여 한쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선

이와 같이 이 단원에서 제시되는 주요 개념들은 위계적인 상호 관계하에서 도입되고 있다. 그런데 여기서 몇 가지 의문점을 가질 수 있다. 먼저 새로운 개념을 도입할 때 필요한 개념들을 하나씩 순서대로 약속하고 있는데, 반직선을 약속하는 데 사용하는 점이나 선은 왜 약속하지 않는가? 다음으로 직사각형, 직각삼각형, 각, 반직선은 상위 개념과 하위 개념을 이용한 명명적 정의 방법을 사용하는데 직각은 좀 다른 방식으로 약속을 하고 있다. 왜 직각만 다르게 약속하는가? 이 질문에 대한 논의는 도형 학습의 모태가 되는 기하학을 살펴본 다음 다루도록 하겠다.

2. 기하학과 평면도형 지도

가. 학교 수학과 학문 수학

3학년의 도형 단원의 구성은 체계적, 위계적으로 기하학이라는 수학 분야의 특성과 밀접한 관련을 맺고 있다. 지금 초등학교 수학에서 다루는 많은 내용은 유클리드의 『원론』에도 수록된 내용이라는 것을 지적하고 있다. 일반적으로 '학교 수학'은 초·중·고등학교에서 일반 학생을 대상으로 대중 교육의 일환으로 지도되는 수학을 의미한다. 반면에 전문 수학자들이 연구하는 수학을 학문 분야로 '학문 수학'으로 부를 수 있다. 학문 수학을 가르치고 배우는 목적에서 학교 수학으로 변환하는 것을 '교수학적 변환'이라고 한다. 초등학교의 도형 단원의 내용들은 기하학이라는 수학을 학교 수학으로 변환한 것이라고 할 수 있다. 특히 유클리드의 『원론』은 학문 수학에 해당하며, 초등학교 교과서의 내용은 학교 수학에 해당한다고 할 수 있다. 학문 수학으로서의 유클리드의 『원론』의 내용이 학교 수학의 내용으로 어떻게 변환되어 있는가에 주목할 필요가 있다.

나. 기하학과 유클리드의 『원론』

기하학의 발생은 고대 이집트 문명과 바빌로니아 문명으로 거슬러 올라갈 수 있다. 기하학의 영문 표기인 'geometry'는 땅(geo)을 측정(metry)한다는 의미를 지닌다. 이집트와 바빌로니아 시대에는 실용적 목적으로 넓이, 길이, 부피 등을 연구하였으며, 도형의 관찰보다는 계산법을 중요시하여 구체적인 문제를 처리하기 위한 기술을 발달시키는 데 주요한 목적이 있었다. 고대 문명에서 발달한 기하학은 논리적 체계가 결여되어 있으므로 학문으로 보기에는 어려움이 있다. 그러나 고대에 발생된 기하학의 싹은 이후 그리스에서 체계적인 학문으로 발달된 기하학의 밑거름이 된다.

학문으로서의 기하학은 그리스에서부터 시작되었다. 그리스인은 기원전 8세기경부터 동쪽은 흑해, 소아시아로부터 서쪽은 남부 이탈리아에 이르는 넓은 영역을 상업 무역의 활동 무대로 삼아 여러 가지 자연 환경과 생활 풍습, 문화를 접함으로써 풍부한 지식을 흡수하였다. 고대 이집트와 바빌로니아의 실용적인 지식을 전수 받은 그리스인들은 다른 고대 문명에서는 발견할 수 없는 독특한 기하학을 발전시킨다. 즉, 그리스인들은 경험적 접근 방법에 만족하지 않고, 엄밀한 연역적 증명을 추구하였다. 특히 그리스의 탈레스는 이러한 입장에서 직관적으로 당연해 보이는 명제를 증명하였는데 이는 최초의 논증 기하학에 대한 기록이다. 탈레스에 의하여 시작된 논증 기하학은 피타고라스와 그의

제자들로 이어졌으며 철학자 플라톤이나 논리학자 아리스토텔레스 등에 의하여 추론의 형식, 정의, 공리를 연구하여 점차 연역적 전개 방법을 확립했다. 이 당시 그리스에는 다양한『원론』이라는 기하학 책이 여러 수학자에 의하여 쓰여 졌는데, 그 가운데 가장 유명한 것이 유클리드의『원론』이다. 이 책은 13권으로 구성되어 있는데 23개의 정의, 5개의 공준, 5개의 공리(공통 개념)를 근거로 엄밀한 연역적 추론에 의하여 명제 465개가 증명되어 있으며, 논리적 엄밀성과 고도의 조직적인 체계를 갖추고 있어 이후 약 2000년간 기하학의 표준이 되었다.

다. 점, 선

점, 선은 기하학의 가장 기본적인 개념이다. 즉, 기하학의 개념적 출발점이다. 그러나 이 개념을 명확하게 정의하는 것은 쉽지 않다. 유클리드의『원론』에서는 점, 선, 면을 다음과 같이 정의한다.

- 점이란 부분이 없는 것이다.
- 선은 폭이 없는 길이이다.

유클리드의『원론』에서는 이와 같이 점과 선을 명확하게 정의하고 이것을 출발점으로 기하학을 위계적으로 전개하고 있지만, 이 정의에는 여러 가지 문제점들이 있다. 점을 부분이 없는 것으로 정의하지만 실제로 부분이 없는 점을 상상할 수 없다. 종이에 점을 찍으라고 하면, 어떻게 찍든 크기를 가지는 도형이 된다. 선도 마찬가지로 폭이 없는 선을 그릴 수는 없다. 즉, 크기도 모양도 없는 점의 존재 가능성이나 크기가 없는 선이 모여 크기가 있는 선이 된다는 것, 폭이 없는 선이 모여 넓이가 있는 면이 된다는 것 등을 설명하기 위해서는 부분, 폭, 크기 등을 정의해야 하고, 이들을 다시 정의하자면 그것을 정의하기 위한 새로운 개념이 필요하게 되는 등의 무한 회귀에 빠지게 된다.

이러한 문제점은 20세기에 접어들 무렵 힐베르트에 의해 해결된다. 그는 점, 선 등의 정의 문제를 포함한 유클리드의『원론』의 논리적 결함을 보완하여 형식적인 공리적 방법으로 기하학을 정립한『기하학의 기초』를 발표하였는데, 여기서는 점, 선 등은 정의하지 않는 무정의 용어로 사용되었다. 즉, 힐베르트는 '점, 선, 면, ~ 위에 있다. ~ 사이에 있다. ~와 ~은 합동이다.'와 같은 6개의 기본적인 개념을 무정의 용어로 받아들이고 이 무정의 용어에서 출발하는 기하학을 엄밀한 공리적 방법으로 제시하고 있다.

학교 수학에서 점과 선을 유클리드의『원론』에서와 같이 정의하려고 하면 앞에서 제시된 문제점들이 발생하게 되고, 학교 수학을 현대 수학에서와 같은 공리적 방법으로 제시할 수 있다. 이와 같은 맥락에서 학교 수학에서는 점과 선의 개념을 따로 정의하지 않고 일상적인 의미로 사용하고 있다. 한편 일부 학자들은 크기가 없는 수학적인 점과 '•'와 같이 크기가 있는 실제의 점을 각각 'point'와 'dot'로 구분하기도 한다.

라. 직각

직각은 90°와 동일한 의미를 가진다. 그런데 초등학교 교육과정에서 직각을 3학년에서 그리고 각도는 4학년에서 도입한다. 따라서 직각은 각도의 개념이 없는 상태에서 약속을 해야 한다. 유클리드의『원론』에서는 각도의 개념을 사용하지 않고 다음과 같이 정의하고 있다.

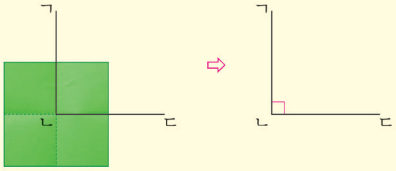
> 한 직선이 다른 직선과 만날 때 이루어지는 서로 이웃한 각이 서로 같을 때 같게 되는 이 각을 각각 직각이라고 한다.

위와 같이 직각을 직선과 각의 개념을 사용하여 정의할 수 있지만, 초등학교 3학년 수준에서 사용하기에는 지나치게 복잡하다. 그래서 직각은 초등학교 수준을 고려하여 개념적으로 정확한 정의보다는 학생의 수준에 맞도록 교수학적인 변환된 정의를 사용할 필요가 있다.

실제로 지난 제7차 교육과정 교과서에서는 직각 삼각자를 그림으로 제시하고 그 그림을 이용하여 예시적으로 직각을 약속하였다. 이 방법은 초등학교 저학년의 특성을 고려한 것으로 이해할 수 있다. 그러나 이 단원의 다른 정의가 대부분 명명적 정의를 따르는 것과 비교하여 지나친 차이가 있다고 할 수 있으며 주어진 직각 삼각자가 직각 삼각자인지를 직각을 모르는 상태에서 파악하기 어렵다는 문제점이 있다. 2009 개정 교육과정의 교과서에서는 아래와 같이 색종이를 두 번 접어서 각을 만들게 한 다음 이를 이용하여 직각을 정의하였다.

도형의 이름

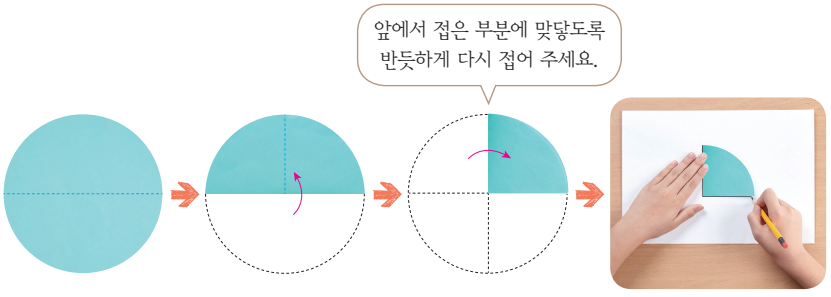
종이를 반듯하게 두 번 접었다 펼쳤을 때 생기는 각을 직각이라고 합니다.



직각 ㄱㄴㄷ을 나타낼 때에는 꼭짓점 ㄴ에 ㄴ 표시를 하기도 합니다.

이 정의는 유클리드의 『원론』의 직각의 정의를 초등학교 학생 수준을 고려하여 변환한 것으로 볼 수 있다. 즉, 종이를 한 번 접어서 직선을 만들고, 그 직선을 포개어 접어서 처음 직선과 만나면서 직선을 만들었고, 이때 생긴 이웃한 두 각의 크기가 같다. 그러나 제시된 그림이 정사각형 모양의 색종이라 접어서 생기는 직각 이외에도 이미 종이 자체에 직각을 포함하고 있어 학생들에게 오개념을 심어 줄 수 있는 여지가 있다. 이와 같은 관점에서 이번 수학책에서는 정사각형 모양의 색종이가 아닌 원 모양의 종이 또는 각이 없는 종이를 접어서 각을 만들고 이를 이용하여 직각을 약속하였다.

다음과 같이 종이를 두 번 접어 봅시다.



그림과 같이 종이를 반듯하게 두 번 접었을 때 생기는 각을 직각이라고 합니다.

직각 ㄱㄴㄷ을 나타낼 때에는 꼭짓점 ㄴ에 ㄴ 표시를 합니다.

자료 출처

• 강완, 나귀수, 백석윤, 이경화(2013). 『초등수학 교수 단위 사전』. 경문사.

• 김수환, 박성택, 신준식, 이대현, 이의원, 이종영, 임문규, 정은실(2012). 『초등학교 수학과 교재 연구』. 동명사.

• 이종우 편저(1998). 『기하학의 역사적 배경과 발달』. 경문사.

• 이우영, 신항균 역(1996). 『수학사』. 경문사.

2 단원 1 차시

단원 도입

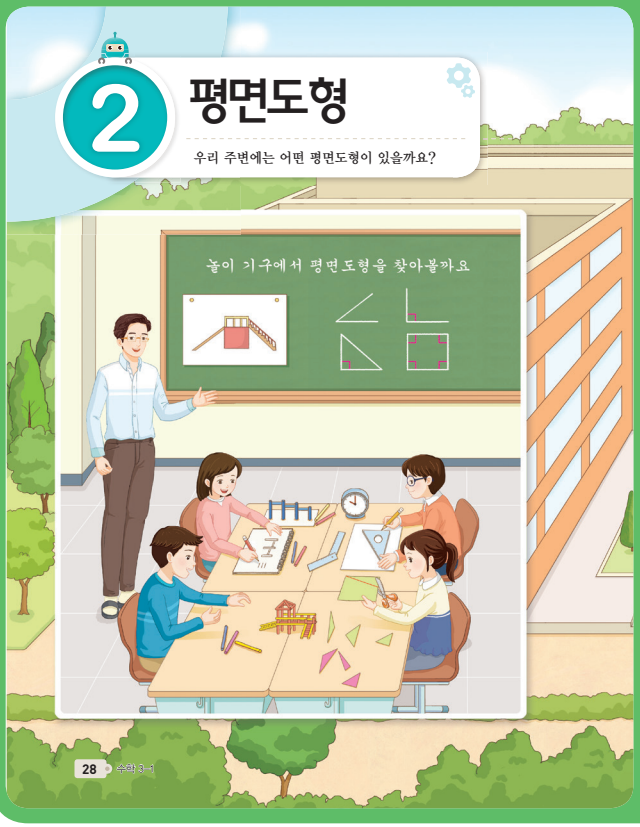
수업의 흐름

선수 학습 내용 알아보기

그림 속 상황 살펴보기

공부할 내용 살펴보기

이 단원에서 배울 내용 확인하기



+ 선수 학습 내용 알아보기 (『수학 익힘』 19쪽)

평면도형을 학습하기 전에 2학년 2학기까지 배웠던 원 찾기, 주어진 조건에 맞는 도형 그리기(삼각형), 꼭짓점, 변을 알고 찾기, 오각형과 육각형을 알고 구별하기의 수준을 확인해 본다.

- 원을 모두 찾아 기호를 써 보세요. — 가, 마입니다.
- 조건에 맞는 도형을 점 종이에 다른 모양으로 2개 그려 보세요.
  — (점 종이에 삼각형을 2개 그린다.)
- ☐ 안에 알맞은 말을 써넣으세요. — (꼭짓점과 변을 알맞게 쓴다.)
- 표를 완성해 보세요. — (오각형과 육각형을 알고 표를 완성한다.)

단순히 문제를 해결한 결과만을 확인하기보다는 문제를 해결한 과정을 학생들에게 설명하게 하여 자신의 능력을 확인해 볼 수 있는 기회를 제공한다.

+ 그림 속 상황 살펴보기

이 단원에서 다루고 있는 선분, 각, 직각, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형 등의 평면도형을 이용하여 학생들이 새로운 놀이 기구를 만드는 장면과 친숙한 학교의 풍경을 보면서 일상적인 용어를 사용하여 이 단원에서 배울 내용에 흥미를 가지도록 도입한다.
삼각자, 가위 같은 부분에서 보여 주는 각이나 문이 열린 모양에서의 다양한 크기의 각을 소개할 수도 있다. 특히 주변의 물체에 직각이 많이 있다는 것을 알게 하고, 학생들에게 직각이 있는 경우를 예로 들어 보게 할 수도 있다. 직각삼각형, 직사각형, 정사각형도 그림에서 찾아보게 할 수 있다. 또한 교실과 학교 주변에 있는 여러 가지 도형을 찾아보면서 선수 학습 내용을 확인하고, 학생들에게 그러한 도형들이 생활 가운데 어디에 있는지 찾아보게 하면서 이 단원에서 배울 내용을 확인할 수 있다.
특히 각 차시의 도입 그림과 관련되는 그림을 살펴보면서 공부할 내용에 관심과 흥미를 가지도록 유도한다.

들려줄 이야기

수일, 지혜, 슬기, 도영이는 다양한 재료와 도구를 이용하여 여러 가지 놀이 기구를 만들고 있어요.
"우리 어떤 놀이 기구를 만들어 볼까?"
슬기가 친구들에게 물었어요.
"나는 철봉을 만들고 싶어."
"구름사다리를 만들어 볼까?"
"그네와 시소도 만들어 보자."
친구들은 학교 운동장에서 볼 수 있는 다양한 놀이 기구를 만들기로 했어요. 학교 운동장에서는 놀이 기구뿐만 아니라 여러 가지 도형도 찾아볼 수 있어요. 그림을 설펴보면서 학교 운동장에서 볼 수 있는 도형을 찾아보고 이번 단원에서 무엇을 공부할지 친구들과 함께 이야기해 보세요.

- 28쪽의 장소는 어디인가요? — 교실입니다.
- 교실에 있는 학생들은 무엇을 하고 있나요?
  — 다양한 놀이 기구를 만들고 있습니다. / 다양한 도구를 사용하여 여러 가지 놀이 기구를 만들고 있습니다. / 그리기를 하는 학생도 있고, 색종이를 오리고 있는 학생도 있습니다.
- 여러분이 체험한 놀이 기구가 있다면 무엇인지 이야기해 보세요.
  — (자신이 체험했던 놀이 기구를 친구들과 이야기한다.)
- 여러분이 놀이 기구를 만든다면 무엇을 만들고 싶은지 이야기해 보세요. — (자신의 생각을 친구들과 자유롭게 이야기한다.)
- 28쪽에서 찾을 수 있는 여러 가지 도형들을 이야기해 보세요.
  — 원, 삼각형, 사각형 모양이 있는 것들: 시계는 원 모양입니다. 삼각자에서 삼각형을 찾을 수 있습니다. 칠판은 사각형입니다. 도화지는 사각형입니다.
  — 새로운 모양이 있는 것들: 가로와 세로의 길이가 같아 보이는 사각형과 그렇지 않은 사각형이 있습니다.
  — (자유롭게 발표한다.)

학생들이 발표할 때 사용하는 모양, 도형, 세모와 삼각형, 네모와 사각형이라는 용어에 민감한 반응을 보이지 않도록 한다. 도형을 설명할 때에는 학생들이 자유롭게 단어를 선택할 수 있도록 하며 경우에 따라 사물 자체를 지칭하여 말하도록 안내한다.

• 29쪽의 장소는 어디인가요?
  — 운동장입니다. / 교실 밖입니다. / 학교입니다.
• 운동장에서 학생들은 무엇을 하고 있나요?
  — 운동장에서 축구를 하고 있습니다.
  — 놀이터에서 놀이 기구를 타고 있습니다.
• 학교와 운동장에서 찾을 수 있는 여러 가지 도형들을 이야기해 보세요.
  — 학교 건물의 모습이 큰 사각형입니다.
  — 놀이터 바닥에서 사각형을 찾을 수 있습니다.
  — 창문의 모양은 사각형입니다.
  — 운동장 한가운데에 있는 도형은 원입니다.

+ 공부할 내용 살펴보기

학생들이 여러 가지 상황에서 다양한 도형을 찾아내도록 충분한 시간을 제공하며 학생들이 찾지 못하는 도형은 교사가 도움말을 주어 학생들의 대답을 유도한다.
발견한 도형을 그림 위에 진한 연필이나 색연필, 색 볼펜 등으로 그려 보게 해도 좋다.

• 찾아낸 도형을 종이에 그려 보세요.
  — (찾아낸 다양한 도형을 그려 본다.)
• 그린 그림을 짝이 그린 것과 비교해 보세요. 어떻게 다른가요?
  — 저는 옆으로 길쭉한데 짝은 모든 변의 길이가 비슷한 것 같습니다.

이미 알고 있는 도형을 찾고 그리는 활동은 교사가 학생들의 선수 학습의 정도를 진단하는 데 도움을 준다. 교사는 이를 바탕으로 이후 수업의 내용과 방법을 설계하는 토대로 삼으면 좋다.

• 도형의 이름을 말해 보세요.
  — (각각의 도형을 가리키며) 사각형(삼각형, 원, 오각형)입니다.
• 왜 그것이 사각형(삼각형, 원, 오각형)이라고 생각했나요?
  — 변이 4개 있기 때문입니다.

+ 수학 교과 역량

이런 활동을 할 수 있어요

● 도형 알아맞히기 스무고개 하기 태도 및 실천
[인원] 반 전체
① 교사나 학생들 중 한 명이 마음속으로 도형 하나를 정하고, 나머지 학생들은 질문을 한다.
② 진행하는 사람은 "네.", "아니요."로만 대답할 수 있다.
  — 구부러진 선으로 되어 있나요? / 아니요.
  — 변이 3개인가요? / 아니요.
  — 변이 4개인가요? / 네.
  — 사각형입니다.
③ 사각형의 특징을 차례로 발표한다.
④ 놀이를 한 다음 모둠끼리 놀이를 더 하도록 한다.

자신의 생각을 친구들과 공유하며 협력하는 활동에서 다른 사람을 배려하고 존중할 수 있는 태도를 실천하도록 한다.

• 사각형(삼각형, 원, 오각형)을 그렸는데 다른 친구가 그린 사각형(삼각형, 원, 오각형)의 모양과 조금 달라요. 사각형을 구분하기 위해 이름을 지어 보세요.
  — 길쭉 사각형, 네 변의 길이가 같은 사각형입니다.
• 왜 그렇게 이름을 지었나요? 이름을 지은 이유를 설명해 보세요.
  — 길쭉해 보이기 때문입니다. / 네 변의 길이가 같기 때문입니다.
• 누가 만든 이름이 더 어울리나요? 그 이유는 무엇인가요?
  — ○○입니다.
  — 간단하기 때문입니다. 어떤 도형인지 쉽게 알 수 있기 때문입니다.

이 단원에서 배울 각, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형 등의 도형을 미리 보여 주고 이름을 붙이는 활동을 추가해도 좋다. 이름을 붙일 때에는 그렇게 이름을 붙인 이유도 함께 적어 보도록 하며, 친구가 붙인 이름과 그렇게 이름을 붙인 이유를 서로 비교해 보는 것도 좋다. 단 도형의 수학 용어는 언급하지 않는다.

도형	내가 붙인 이름	그렇게 붙인 이유	친구가 붙인 이름	친구가 그렇게 붙인 이유
직각삼각형	ㄱ 삼각형	ㄱ과 비슷한 모양이어서	반사각형	사각형을 반으로 나누어서
직사각형	4 사각형	A4 용지의 4를 따서	액자 도형	액자와 비슷해서
정사각형	색색 사각형	색종이의 색을 2번 따서	정사변형	네 변의 길이가 같아서

+ 이 단원에서 배울 내용 확인하기

• 지금까지 알아본 내용을 통하여 이 단원에서는 무엇을 공부할지 생각해 보세요.
  — 예전에 배웠던 삼각형, 사각형 도형을 더 자세히 배울 것 같습니다.
  — 아직 배우지 않은 새로운 도형을 알아볼 것 같습니다.
  — 새로운 도형을 이용하여 새로운 놀이 기구를 만드는 공부를 할 것 같습니다.

단원 학습에 동기 부여 및 관심과 호기심을 일으키기 위하여 다양한 의견을 수용해 주고 자유로운 분위기에서 의견을 제시할 수 있도록 격려한다.